

《高等数学》第五章——定积分

练习题 (A)

一、判断正误题：(判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×)

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \int_0^1 x dx.$ ()

(2) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du.$ ()

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, a, b, c 为任意三个常数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad ()$$

(5) $\int_0^1 x dx \leq \int_0^1 \ln(1+x) dx.$ ()

(6) $\int_a^b \sin x^2 dx \leq \int_a^b |\sin x^2| dx.$ ()

(7) $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e.$ ()

(8) $\frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^x \cos t^2 dt \right) = \cos x^2.$ ()

(9) 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\int_0^x \sin t^2 dt$ 与 x^2 是等价无穷小. ()

(10) 不能直接使用牛顿-莱布尼兹公式求 $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx.$ ()

(11) 若 $\int_0^x f(t) dt = x^2 \ln x$, 则 $f(x) = x + 2x \ln x.$ ()

(12) 由 $\int_1^y e^t dt + \int_1^x \cos t^2 dt = 0$ 确定隐函数 $y = f(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x^2}{e^y}.$ ()

(13) 参数方程 $\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\sin u}{u} \\ y = \cos t. \end{cases}$ 在 $t = 2$ 时相应点处的法线的斜率为 $-2.$ ()

(14) 若曲线 $y = ax$ 与 $x = 1$ 及 $y = 0$ 所围成的图形的面积为 1 , 则 $a = 2.$ ()

(15) 如果 $\int_e^{e^2} \frac{k \ln x}{x} dx = 1$, 则 $k = \frac{2}{3}$ ()

(16) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 当 $f(x)$ 为奇函数时, 函数 $\int_0^x f(t) dt$

为偶函数. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数. ()

二、选择题：(将正确答案的序号填写在括号内)

(1) 在闭区间 $[-1, 1]$ 上不可积的函数是 ()

A: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ B: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

C: $f(x) = \operatorname{sgn} x$ D: $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

(2) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则下列等式不一定成立的是 ()

A: $\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b$ B: $d \left(\int_a^b f(x) dx \right) = 0$

C: $\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$ D: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

(3) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续, 则下列等式不一定成立的是 ()

A: $\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$

B: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数).

C: $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx$

D: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

(4) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上都连续, 则下列等式成立的是 ()

A: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

B: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$

C: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

D: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) - f(-x)]dx$

B: 函数 $\Phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无极值点

(5) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续., 则下列说法不正确的是 ()

A: $\int_a^x f(t)dt$ 是 x 的函数

B: $\int_x^b f^2(t)dt$ 是 x 的函数

C: $\int_x^{x^2} f(t)dt$ 是 x 的函数

D: $\int_a^b f(xt)dt$ 是 x 的函数

E: $\int_a^b f(xt)dt$ 是 t 的函数

F: $\int_a^b f(x)dx$ 是常数

(6) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续., $x \in [a, b]$. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则下列说法不一定正确的是 ()

A: $\Phi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow b-} \Phi(x) = \int_a^b f(t)dt$

B: $\Phi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可微且 $d\Phi(x) = f(x)dx$

C: 若函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则 $\Phi(\varphi(x))$ 在闭区间 $[a, b]$

上也可导且 $(\Phi(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))$

D: 若函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则 $\Phi(\varphi(x))$ 在闭区间 $[a, b]$

上也可导且 $(\Phi(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

(7) 根据定积分的几何意义, 下列各式中正确的是 ()

A: $\int_1^0 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$

B: $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

C: $\int_0^\pi \sin x dx = 0$

D: $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(8) 设函数 $\Phi(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$, 则下列说法不正确的是 ()

A: 函数 $\Phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

C: 曲线 $y = \Phi(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的, 在 $(0, \infty)$ 上是凸的

D: 函数 $\Phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无驻点

(9) 下列各式中错误的是 ()

A: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$

B: $\int_a^b 2xf(x^2)dx = \int_{a^2}^{b^2} f(t)d(t)$

C: $\int_{\frac{\pi}{3}}^\pi \tan x dx = -\ln 2$

D: $\int_0^1 2^x \ln 2 dx = 1$

(10) 摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长是 ()

A: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (t - \sin t)^2} dt$

B: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\cos t)^2} dt$

C: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt$

D: $\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$

(11) 设 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 则由曲线 $r = r(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$ 、 $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) 围成(曲边扇形的面积是 ()

A: $\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$ B: $\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$ C: $\int_\alpha^\beta r(\theta)d\theta$ D: $2 \int_\alpha^\beta r(\theta)d\theta$

(12) 由连续曲线 $y = f(x) > 0$ 、直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 ()

A: $\int_a^b [f(x)]^2 dx$ B: $\pi \int_a^b f(x)dx$ C: $\int_a^b f(x)dx$ D: $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

(13) 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则下列式子成立的是 ()

A: $\int_a^b f(2x+1) dx = F(2b+1) - F(2a+1)$

B: $\int_a^b e^x f(e^x) dx = F(b) - F(a)$

C: $\int_a^b \sec^2 x f(\tan x) dx = F(\tan b) - F(\tan a)$

$$D: \int_a^b \frac{1}{x} f(\ln x) dx = F(\ln b) - F(\ln a)$$

(14) 下列积分中不是反常积分的是 ()

$$A: \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$B: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$C: \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$D: \int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx$$

(15) 下列反常积分收敛的是 ()

$$A: \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (p \leq 1)$$

$$B: \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (p > 1)$$

$$C: \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$D: \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

三、填空题 (将正确答案的序号填写在括号内)

(1) $f(x) = x^2$ 在 $[0,1]$ 上的平均值为_____

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x) dx =$ _____

(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2} dx =$ _____

(4) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx =$ _____

(5) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1-\sin x} dx =$ _____

(6) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$ _____

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(1-x) dx =$ _____

(9) 设 $\ln^2 x$ 是 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的一个原函数, 则 $\int_1^2 xf'(x) dx =$ _____

四、计算题

1. 求下列定积分

$$(1) \int_{-1}^1 |x| dx$$

$$(2) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int_1^e x \ln x dx$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$(5) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(6) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

2. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^4 dt}{\int_x^0 t(t-\sin t) dt}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3}} \right)$$

3. 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 围成的图形的面积

4. 求函数 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ 在区间 $(1, \pi+1)$ 的极大值点.

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, $f(x) < 0$. 证明方程 $x - \int_{-1}^x f(x) dx = 0$ 在 $(-1,1)$ 有且仅有一个根.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导数, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_{-x}^{+x} [f(t+x) - f(t-x)] dt$$

3. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, $x \in [a,b]$. 证明函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导

且 $\Phi'(x) = f(x)$

《高等数学》第五章——定积分

练习题 (B)

一、判断正误题：(判断下列各题是否正确，正确的划√，错误的划×)

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx. \quad ()$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du. \quad ()$$

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续， a, b, c 为任意三个常数，则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad ()$$

$$(4) \int_1^2 \ln x dx \leq \int_1^2 (\ln x)^2 dx. \quad ()$$

$$(5) \int_a^b \cos x^2 dx \leq \int_a^b |\cos x^2| dx. \quad ()$$

$$(6) \pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x) dx \leq 2\pi. \quad ()$$

$$(7) \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^x \cos(t^2) dt \right) = 2x \cos x^2. \quad ()$$

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\int_0^x \ln(1+t) dt$ 与 x^2 是等价无穷小. $()$

(9) 不能直接使用牛顿-莱布尼兹公式求 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$. $()$

(10) 若 $\int_0^x f(t) dt = x^2 \sin x$ ，则 $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$. $()$

(11) 设 $x = \int_0^t e^u du, y = \int_0^t u^2 du$ ，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t}{2t}$. $()$

(12) $\int^y e^{2t} dt + \int_1^x \sin t dt = 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时相应点处的法线的斜率为 -1 . $()$

(13) 若曲线 $y = ax^2$ 与 $x = 1$ 及 $y = 0$ 所围成的图形的面积为 1 ，则

$$a = 2. \quad ()$$

(14) 如果 $\int_0^x e^t dt = e$ ，则 $x = 1$ $()$

(15) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，当 $f(x)$ 为奇函数时，函数 $\int_0^x f(t) dt$

为偶函数，当 $f(x)$ 为偶函数时， $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数. $()$

二、选择题：(将正确答案的序号填写在括号内)

(1) 在闭区间 $[-1, 1]$ 上不可积的函数是 $()$

$$A: f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$B: f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$C: f(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$D: f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

(2) 下列等式正确的是 $()$

$$A: \int_a^b f'(x) dx = f(x)$$

$$B: \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x) + C$$

$$C: \frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = f(x)$$

$$D: \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

(3) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续，则下列等式不一定成立的是 $()$

$$A: \int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

$$B: \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$C: \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx$$

$$D: \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(4) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上都连续，则下列等式成立的是 $()$

$$A: \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

$$B: \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

C: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

D: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) - f(-x)]dx$

(5) 设函数 $f(x)$ 是连续函数且 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则必有 ()

A: $\int_a^x f(t)dt = F(x)$

B: $\left[\int_a^x F(t)dt \right]' = F(x)$

C: $\int_a^x F'(t)dt = f(x)$

D: $\left[\int_a^x F'(t)dt \right]' = f(x) - f(a)$

(6) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $x \in [a, b]$. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则下列说法不一定正确的是 ()

A: $\Phi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow b-} \Phi(x) = \int_a^b f(t)dt$

B: $\Phi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可微且 $d\Phi(x) = f(x)dx$

C: 若函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则 $\Phi(\varphi(x))$ 在闭区间 $[a, b]$

上也可导且 $(\Phi(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))$

D: 若函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则 $\Phi(\varphi(x))$ 在闭区间 $[a, b]$

上也可导且 $(\Phi(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

(7) 根据定积分的几何意义, 下列各式中正确的是 ()

A: $\int_1^0 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$

B: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$

C: $\int_0^{\pi} \sin x dx = 0$

D: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(8) 函数 $\Phi(x) = \int_0^x \frac{2}{3} t^{\frac{1}{3}} dt$ 在 $[-1, 1]$ 上有 ()

A: 极大值

B: 极小值

C: 驻点

D: 拐点

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 则 $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx =$ ()

A: 3

B: $\frac{3}{2}$

C: 1

D: 2

(10) 阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 上相应于从变到的一段弧与极轴所围成的图形的面积 ()

A: $\frac{4}{3} a^2 \pi^3$

B: $\frac{3}{4} a^2 \pi^3$

C: $a^2 \pi^3$

D: $2a^2 \pi^3$

(11) 曲线 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 ()

A: $\frac{\pi^2}{3}$

B: $\frac{\pi^2}{2}$

C: π^2

D: $2\pi^2$

(12) 下列反常积分收敛的是 ()

A: $\int_0^{+\infty} \sin x dx$

B: $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

C: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

D: $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$

三、填空题 (将正确答案的序号填写在括号内)

(1) $f(x) = e^x$ 在 $[0, 1]$ 上的平均值为 _____

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + \cos 3x) dx =$ _____

(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+9x^2} dx =$ _____

(4) $\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x-1} dx =$ _____

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x} dx =$ _____

(6) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____

当 $k \leq 1$ 时, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$ 发散.

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx =$ _____

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(1-2x) dx =$ _____

(9) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx =$ _____

四、计算题

1. 求下列定积分

(1) $\int_{-1}^3 |2-x| dx$ (2) $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ (3) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(4) $\int_0^{2\pi} e^{2x} \cos x dx$ (5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ (6) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$

2. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt}{x^2}$ (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \right) (p > 0)$

3. 求曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 围成的图形的面积

4. 求函数 $F(x) = \int_0^x t(t-4) dt$ 在 $[-1,5]$ 上的增减性、极值、凹向及拐点.

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, $f(x) < 0$. 证明方程 $x - \int_{-1}^x f(x) dx = 0$ 在 $(-1,1)$ 有且仅有一个根.

2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续., $x \in [a,b]$. 证明函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导

且 $\Phi'(x) = f(x)$.

3. 证明: 当 $k > 1$ 时, 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$ 收敛;

《高等数学》第五章——定积分

自测题 (A)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×。每小题 2 分, 共 24 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x \in [a, b]$, 则 $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$. ()
2. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$. ()
3. 曲线 $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的, 在 $(0, \infty)$ 上是凸的.. ()
4. 积分 $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx$ 可以直接使用牛顿-莱布尼兹公式求出.. ()
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right) = \int_0^1 x^2 dx$. ()
6. $0 \leq \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin x^2 dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. ()
7. 如果 $\int_e^{e^2} \frac{k}{x \ln x} dx = 1$, 则 $k = 2$. ()
8. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int_a^b e^x f(e^x) dx = F(b) - F(a)$. ()
9. 当 $p \leq 1$ 时, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 与 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^p} dx$ 都收敛.. ()
10. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b 2xf(x^2)dx = \int_{a^2}^{b^2} f(t)d(t)$. ()
11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \sin t^4 dt$ 是 x^2 的高阶无穷小. ()
12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码

填在题干上的括号内。每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a \leq x \leq b$, 则下列各式中正确的是 ()

$$\begin{aligned} \text{A: } \frac{d}{dx} \int_a^x f(tx)dt &= xf(x) & \text{B: } \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} f(t)dt &= f(x^2) - f(2x). \\ \text{C: } \frac{d}{dx} \int_{2x}^b f(t)dt &= 2f(2x) & \text{D: } d\left(\int_a^x f(t)dt\right) &= f(x)dx \end{aligned}$$

2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, $x \in [a, b]$, 则下列等式不一定成立的是 ()

$$\begin{aligned} \text{A: } \int_a^b f(x)dx &= \left[\int f(x)dx \right]_a^b & \text{B: } \int_a^b f'(x)dx &= f(b) - f(a) \\ \text{C: } \frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) &= f(x) & \text{D: } \frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x)dx \right) &= f(x) \end{aligned}$$

3. 阿基米德螺线 $\rho = a\theta (a > 0)$ 上 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的弧长是 ()

$$\begin{aligned} \text{A: } \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\theta^2} d\theta & & \text{B: } \int_0^{2\pi} a\theta d\theta \\ \text{C: } \int_0^\pi a\sqrt{1+\theta^2} d\theta & & \text{D: } \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta} d\theta \end{aligned}$$

4. 若 xe^x 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 xf'(x)dx =$ ()

$$\text{A: } 1+e \quad \text{B: } 1-e \quad \text{C: } e \quad \text{D: } -e$$

5. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上都连续, 则下列等式成立的是 ()

$$\begin{aligned} \text{A: } \int_{-a}^a f(x)dx &= 0. & \text{B: } \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx. \\ \text{C: } \int_{-a}^a f(x)dx &= 2\int_0^a f(x)dx & \text{D: } \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a [f(x) - f(-x)]dx \end{aligned}$$

三、填空题（将正确答案填写在空格上，每小题 2 分，共 12 分）

1. $f(x) = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的平均值为_____
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^x \frac{du}{1+u}}{x} =$ _____
3. $\int_{-1}^1 \frac{x^{999}}{1+x^2} dx =$ _____
4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(1-x)dx =$ _____
5. 若 $\int f(x)dx = e^{x^2} + C$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx =$ _____
6. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx =$ _____

四、计算题（共 38 分）

1. 求下列定积分（每小题 3 分，共 12 分）

$$\begin{aligned} (1) \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx & \quad (2) \int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\ (3) \int_1^e x \ln x dx & \quad (4) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$2. \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^0 t(t - \sin t) dt}{\int_0^{x^2} \arcsin t dt} \quad (5 \text{ 分})$$

3. 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 围成的图形的面积（5 分）

$$4. \text{设函数 } \Phi(x) = \int_1^x t(t-1)dt \text{ 求}$$

(1) 求函数 $\Phi(x)$ 的单调区间（5 分）

(2) 求函数 $\Phi(x)$ 的极值（3 分）

(3) 求函数 $\Phi(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值（3 分）

$$5. \text{求参数方程 } \begin{cases} x = \int_0^t e^{u^2} du, \\ y = \cos t. \end{cases} \text{ 在 } t=0 \text{ 时相应点处的切线方程.} \quad (5 \text{ 分})$$

五、证明题（共 16 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, $f(x) < 0$. 证明方程 $x - \int_{-1}^x f(t)dt = 0$ 在 $(-1,1)$ 有且仅有一个根.（5 分）

2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续., $x \in [a,b]$. 证明 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 且 $\Phi'(x) = f(x)$ （5 分）

3. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 证明:

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 函数 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数.（3 分）

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数.（3 分）

《高等数学》第五章——定积分

自测题 (B)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×。每小题 2 分, 共 24 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x \in [a, b]$, 则 $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$. ()
2. $\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx = 9\pi$. ()
3. 曲线 $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的, 在 $(0, +\infty)$ 上是凸的. ()
4. 积分 $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$ 可以直接使用牛顿-莱布尼兹公式求出. ()
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^p}{n^{p+1}} + \frac{2^p}{n^{p+1}} + \cdots + \frac{n^p}{n^{p+1}} \right) = \int_0^1 x^p dx (p > 0)$. ()
6. $\int_3^4 \ln x dx \leq \int_3^4 (\ln x)^2 dx$. ()
7. 如果 $\int_e^{e^2} \frac{k \ln x}{x} dx = 1$, 则 $k = \frac{2}{3}$. ()
8. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int_a^b e^x f(e^x) dx = F(b) - F(a)$. ()
9. 当 $p > 1$ 时, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛. ()
10. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b 3x^2 f(x^3) dx = \int_a^b f(t) d(t)$. ()
11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} \sin t dt$ 是 x^2 的高阶无穷小. ()
12. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 2$. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码

填在题干上的括号内。每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a \leq x \leq b$, 则下列各式中正确的是 ()

A: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(tx) dt = xf(x)$

C: $\frac{d}{dx} \int_{2x}^b f(t) dt = 2f(2x)$

B: $\frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} f(t) dt = f(x^2) - f(2x)$

D: $d\left(\int_a^x f(t) dt\right) = f(x) dx$
2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, $x \in [a, b]$, 则下列等式不一定成立的是 ()

A: $\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b$

C: $\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$

B: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

D: $\frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = f(x)$
3. 摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长是 ()

A: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (t - \sin t)^2} dt$

C: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt$

B: $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\cos t)^2} dt$

D: $\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$
4. 若 $f(x)$ 的导数是 xe^x , 则 $\int_0^1 xf'(x) dx =$ ()

A: $1+e$

B: $1-e$

C: e

D: $-e$
5. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上都连续, 则下列等式成立的是 ()

A: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

C: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

B: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$

D: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) - f(-x)] dx$

三、填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. $f(x) = \cos x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的平均值为_____

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+u) du}{x^2} =$ _____

3. $\int_{-1}^1 \frac{x^{2013}}{1+x^2} dx =$ _____

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_0^1 f(1-x) dx =$ _____

5. 若 $\int f(x) dx = e^{x^2} + C$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx =$ _____

6. $\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx =$ _____

四、计算题 (共 38 分)

1. 求下列定积分 (每小题 3 分, 共 12 分)

(1) $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx$

(2) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(3) $\int_0^{2\pi} e^{2x} \sin x dx$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^0 t(t - \sin t) dt}{\int_0^{x^2} \arcsin t dt}$ (5 分)

3. 求曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 围成的图形的面积 (5 分)

4. 设函数 $\Phi(x) = \int_1^x t(t-1) dt$. 求

(1) 求函数 $\Phi(x)$ 的单调区间 (5 分)

(2) 求函数 $\Phi(x)$ 的极值 (3 分)

(3) 求函数 $\Phi(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最值 (3 分)

5. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \ln 2\right)$ 处的切线方程. (5 分)

五、证明题 (共 16 分)

1. 证明: 方程 $3x - 1 - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 0$ 在 $(0,1)$ 有唯一的实根. (5 分)

2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, $x \in [a,b]$.

证明: $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 且 $\Phi'(x) = f(x)$ (5 分)

3. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,

证明: 当 $f(x)$ 为奇函数时, 函数 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数. (6 分)