第十二章 数项级数

- 一、基本内容
- §12.1 级数的收敛性
- §12.2 正项级数
- §12.3 一般项级数
- 二、研究级数的目的与要求
- 1、借助级数表示很多有用的非初等函数。2、解微分方程。3、利用多项式来逼近一般的函数。4、实数的近似计算。熟练掌握数项级数收敛的概念与必要条件；掌握级数敛散性的Cauchy准则；熟练掌握收敛级数的运算性质；熟练掌握正项级数收敛的常用判别法；熟练掌握关于交错级数的Leibniz判别法；了解Abel变换，会使用关于一般数项级数的Abel判别法和Dirichlet判别法；掌握绝对收敛级数及其基本性质，了解级数重排问题、级数乘积问题。
- 三、重点与难点
- 重点：是级数敛散性的概念和正项级数敛散性的判别
- 难点：一般项级数数敛散性的判别

§12.1 级数的收敛性

1、级数收敛的定义

定义1 给定一个数列$\{u_n\}$, 将其各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称级数), 其中 u_n

称为数项级数(1)的通项或一般项. 数项级数(1)也

前页 后页 返回

数项级数(1)的前n项之和记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad (2)$$

称为数项级数(1)的第 n 个部分和, 也简称部分和.

定义2 **若数项级数(1)的部分和数列** $\{S_n\}$ 收敛于 S (即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$), 则称数项级数(1)收敛, S 称为数项级数(1)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad \text{或}\ S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

若 $\{S_n\}$是发散数列, 则称数项级数(1)发散.

例1 讨论等比级数(也称几何级数)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \tag{3}$$

的收敛性($a \neq 0$).

前页 后页 返回

2、级数收敛的判别法

定理12.1(级数收敛的柯西准则)级数(1)收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p 都有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\varepsilon. \qquad (4)$$

推论(级数收敛的必要条件) 若级数(1)收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

前页 后页 返回

3、级数的基本性质

定理12.2 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛, 则对任意常数c，d，级数$\sum (cu_n + dv_n)$亦收敛， 且

$$\sum (cu_n + dv_n) = c\sum u_n + d\sum v_n .$$

定理12.3 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

定理12.4 在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 也不改变它的和.

- **小结：**
- 1、级数收敛和发散的定义
- 2、级数收敛的柯西准则
- 3、级数的基本性质

§12.2　正项级数

- 收敛性是级数研究中最基本的问题，本节将对最简单的正项级数建立收敛性判别法则.

一、正项级数收敛性的一般判别原则
二、比式判别法和根式判别法
三、积分判别法
四、拉贝判别法

1、正项级数收敛性的一般判别原则

定理12.5 正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:部分和

数列$\{S_n\}$ 有界, 即存在某正数M, 对一切正整数 n 有

$S_n < M$.

定理12.6 (比较原则) 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项

级数, 如果存在某正数N, 对一切 $n > N$ 都有

$$u_n \le v_n \qquad (1)$$

则

前页 后页 返回

(i) 若级数$\sum v_n$收敛,则级数$\sum u_n$也收敛;

(ii) 若级数$\sum u_n$发散,则级数$\sum v_n$也发散.

例1 考察$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$的收敛性.

推论 (比较原则的极限形式) 设 $\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l, \qquad (3)$$

则

(i) 当 $0<l<+\infty$ 时, 级数 $\sum u_n, \sum v_n$ 同敛散;

(ii) 当 $l=0$ 且级数 $\sum v_n$ 收敛时, 级数 $\sum u_n$ 也收敛;

(iii) 当 $l=+\infty$ 且级数 $\sum v_n$ 发散时, 级数 $\sum u_n$ 也发散.

例2 级数 $\sum \frac{1}{n \cdot n!}$ 是收敛的，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \cdot n!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

以及等比级数 $\sum \frac{1}{n!}$ 收敛，根据比较原则的极限形

式，级数 $\sum \frac{1}{n \cdot n!}$ 也收敛.

2、比式判别法和根式判别法

定理12.7(达朗贝尔判别法, 或比式判别法)设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正整数 N_0 及常数 $q\ (0<q<1)$.

(i) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q, \tag{5}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛.

(ii) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1, \tag{6}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

推论1(比式判别法的极限形式) 若 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q, \tag{7}$$

则

(i) 当 $q<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.

前页 后页 返回

*推论2设 $\sum u_n$ 为正项级数.

(i) 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$, 则级数收敛;

(ii) 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$, 则级数发散;

定理12.8 (柯西判别法, 或根式判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正数 N_0 及常数 l,

(i) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \le l < 1, \tag{9}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1, \tag{10}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

推论1 (根式判别法的极限形式) 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{11}$$

则

(i) 当 $l<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $l>1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.

3、积分判别法

定理12.9 (积分判别法) 设 f 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数, 那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

例4 讨论 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 函数 $f(x)=\frac{1}{x^p}$, 当 $p>0$ 时在 $[1,+\infty)$ 上是非负减函

数, 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, $p\le 1$ 时发散. 故由积分判别法得 $\sum\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $0<p\le 1$ 时发散. 至于 $p\le 0$ 的情形, 则可由收敛的必要条件知它也是发散的.

前页 后页 返回

*4、拉贝判别法

定理12.10 (拉贝判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正整数 N_0 及常数 r.

(i) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq r > 1,$$

则级数$\sum u_n$收敛;

(ii) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 1,$$

则级数$\sum u_n$发散.

推论(拉贝判别法的极限形式)设 $\sum u_n$ 为正项级数,

且极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$$

存在, 则

(i) 当 $r>1$时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $r<1$时, 级数$\sum u_n$ 发散.

- **小结：**
- 1、 正项级数的比较原则及推论
- 2、 比式判别法及推论
- 3、 根式判别法及推论
- 4、 拉贝判别法及推论

§ 12.3　一般项级数

- 1、交错级数
- 2、绝对收敛级数及其性质
- 3、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

1、交错级数

若级数的各项符号正负相间，即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots \qquad (1)$$

$$(u_n > 0, n = 1, 2, \cdots),$$

则称为交错级数.

定理12.11 (莱布尼茨判别法) 若交错级数(1)满足:

(i) 数列$\{u_n\}$单调递减;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数(1)收敛.

前页 后页 返回

推论 若级数(1)满足莱布尼茨判别法的条件, 则收敛级数(1)的余项估计式为

$$\left|R_n\right| \le u_{n+1}.$$

前页 后页 返回

2、绝对收敛级数及其性质

若级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (2)$$

各项绝对值组成的级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \qquad (3)$$

收敛, 则称原级数(5)为绝对收敛级数.

定理12.12 绝对收敛的级数是收敛的.

若级数(5)收敛, 但级数(6)不收敛, 则称级数(5)为条件收敛.

全体收敛的级数可分为绝对收敛级数与条件收敛级数两大类.

绝对收敛级数的两个重要性质.

1. 级数的重排

给定级数 $\sum u_n$ 把它的项重新排列后所得到的级数, 就称为原来级数的重排级数.

定理12.13 设级数(5)绝对收敛, 且其和等于S, 则任意重排后所得到的级数(7)绝对收敛且和也为S.

2. 级数的乘积

设有收敛级数

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = A, \tag{4}$$

$$\sum v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots = B. \tag{5}$$

将级数(11)与(12)中每一项所有可能的乘积列成下

表:

$$
\begin{array}{|cccccc}
\hline
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\qquad (6)
$$

这些乘积u_iv_j可以按各种方法排成不同的级数，常用的有按正方形顺序或按对角线顺序.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & \cdots & & u_1v_n & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_2v_1 & \leftarrow & u_2v_2 & & u_2v_3 & \cdots & & u_2v_n & \cdots \\
 & & & & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_3v_1 & \leftarrow & u_3v_2 & \leftarrow & u_3v_3 & \cdots & & u_3v_n & \cdots \\
 & & & & & & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & \cdots & & \bullet & \cdots \\
 & & & & & & & & \downarrow & \\
\leftarrow & u_nv_1 & \leftarrow & u_nv_2 & \leftarrow & u_nv_3 & \cdots & \leftarrow & u_nv_n & \cdots \\
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & \cdots & & \bullet & \cdots
\end{array}
$$

正方形顺序

前页 后页 返回

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & \cdots & \\
\swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & \cdots & \\
\swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
 & u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & \cdots & \\
\swarrow & & \swarrow & & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & \\
 & & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & & \cdots &
\end{array}
$$

对角线顺序

依次相加, 于是分别有

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 +$$
$$u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1 + \cdots \quad (7)$$

和

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots. \quad (8)$$

定理12.14 (柯西定理) 若级数(11)、(12)都绝对收敛, 则对(13)中 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛, 且其和等于AB.

前页 后页 返回

例1 等比级数 $\dfrac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots,\ |r|<1$

是绝对收敛的. 将 $(\sum r^n)^2$ 按(15)的顺序排列, 则得到

$$\frac{1}{(1-r)^2}=1+(r+r)+(r^2+r^2+r^2)+\cdots+\underbrace{(r^n+\cdots+r^n)}_{n+1}+\cdots,$$

$$=1+2r+3r^2+\cdots+(n+1)r^n+\cdots.$$

注 级数乘积在幂级数(第十四章)中有重要应用.

3、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

下面介绍两个判别一般项级数收敛性的方法.

引理 (分部求和公式, 也称阿贝尔变换)

设 $\varepsilon_i, v_j (i = 1, 2, \cdots, n)$, 两组实数, 若令

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k (k = 1, 2, \cdots, n),$$

则有如下分部求和公式成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n \sigma_n. \quad (9)$$

推论 (阿贝尔引理) 若

(i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是单调数组, 记 $\varepsilon = \max\limits_{k}\{|\varepsilon_k|\}$;

(ii) 对任一正整数 $k(1 \le k \le n)$ 有 $|\sigma_k| \le A$, 则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| \le 3\varepsilon A. \qquad (10)$$

现在讨论形如

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (11)$$

级数的收敛性的判别法.

定理12.15 (阿贝尔判别法) 若$\{a_n\}$为单调有界数列,

且级数$\sum b_n$收敛, 则级数(20)收敛.

定理12.16 (狄利克雷判别法) 若数列$\{a_n\}$单调递减,

且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又级数$\sum b_n$的部分和数列有界, 则级数(20)收敛.

例2 若数列$\{a_n\}$具有性质：

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots, \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

则级数 $\sum a_n \sin nx$ 和 $\sum a_n \cos nx$ 对任何 $x \in (0, 2\pi)$ 都收敛.

例3级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛但不绝对收敛.

- 小结：
- 1、 莱布尼茨判别法
- 2、 绝对收敛和条件收敛的定义
- 2、 绝对收敛原理
- 3、 绝对收敛级数的性质
- 4、 阿贝尔判别法
- 5、 狄利克雷判别法