一元函数极限、连续（数二）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1、（94 年，3 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　）

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　（B）$a=0,b=-2$

（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　（D）$a=1,b=-2$

2、(95,3 分) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义， $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则（　）

（A）$\varphi[f(x)]$ 必有间断点　（B）$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

（C） $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

3、（96，3 分）设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则（　）

(A)　$a=\dfrac{1}{2},b=1$　　(B)　$a=1,b=1$

(C)　$a=-\dfrac{1}{2},b=-1$　　(D)　$a=-1,b=1$

4、（97，3 分）设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

5、（97，3 分）设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$， $f(x)\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$ 为（　）

(A)　$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\ge 0\end{cases}$.　（B）$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\ge 0\end{cases}$.

(C)　$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\ge 0\end{cases}$.　(D)　$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\ge 0\end{cases}$.

6、（98，3 分）设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　）

（A）若 x_n 发散，则 y_n 必发散　（B）若 x_n 无界，则 y_n 必有界

（C）若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　（D）若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

7、（99，3 分）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的（　）

（A）充分条件但非必要条件　（B）必要条件但非充分条件

（C）充分必要条件　（D）既非充分条件又非必要条件.

8、 (00,3 分)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　）

（A）0（B）6 （C）36（D）∞

9、(00，3 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则常数 a,b 满足（　）

(A) $a<0,b<0$.　（B）$a>0,b>0$.

(C)　$a\le 0,b>0$　(D)　$a\ge 0,b<0$

10、（01，3 分）设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 的高阶无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 的高阶无穷小，则正整数 n 等于（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

11、（01，3 分）设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　）

（A）0　（B）1　（C）$\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　（D）$\begin{cases}0, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

12、(02，3 分)设 $y=y(x)$ 是二阶线性常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（　）

（A）不存在　（B）等于1（C）等于2　（D）等于3

13、(03，4 分）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　）

(A) $a_n<b_n$，对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$，对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

14、(04，4 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于（　）

（A）$\int_1^2\ln^2 xdx$　（B）$2\int_1^2\ln xdx$

（C）$2\int_1^2\ln(1+x)dx$　（D）$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$

15、(04，4 分）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　）

（A）α,β,γ　（B）α,γ,β（C）β,α,γ（D）β,γ,α

16、(05，4 分）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　）

（A）$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B））$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

17、(07，4 分）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

18、(07，4 分）函数 $f(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$（　）

（A）0　（B）1　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

19、(08，4 分）设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有（　）

（A）1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　（B）1 个可去间断点，1 个无穷间断点

（C）2 个跳跃间断点　（D）2 个无穷间断点

20、(08，4 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　）

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

21、(09，4 分）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　）

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$

（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$（D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

22、(09，4 分）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为（　）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）无穷多个

23、（10，4 分）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为（　）

（A）0（B）1 （C）2 （D）3

24、 (10，4 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　）

（A） $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$ （B） $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

（C） $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$ （D） $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

25、（11，4 分）已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　）

(A) $k=1,c=4$ (B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$ (D) $k=3,c=-4$

26、（11，4 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　）

（A） $-2f'(0)$ （B） $-f'(0)$ （C） $f'(0)$ （D） 0

二、填空题

1、（95，3 分） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________

2、（97，3 分）已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_______

3、（98，3 分） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________

4、（00，3 分） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$________

5、（01，3 分） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________

6、（02，3 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_______

7、（02，3 分） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$_______

8、（03，4 分）若 $x\to0$ 时，$\left(1-ax^2\right)^{\frac14}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_______

9、（04，4 分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$_______

10、（05，4 分）当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_______

11、（06，4 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____

12、（07，4 分） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________

13、（08，4 分）已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{\left(e^{x^2}-1\right)f(x)}=1$，则 $f(0)=$________

14、（09，4 分） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$________

15、（11，4 分） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac1x}=$________

三、计算

1、（94， 5 分）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

2、（97， 5 分）求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

3、（98， 5 分）求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型

4、（99， 5 分）求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

5、（01， 7 分）求 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

6、（02，7 分）已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导， $f(x)>0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且

满足 $\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$

7、（03，10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}} & x>0\end{cases}$，问 a 为何值， $f(x)$ 在 $x=0$

处连续；a 为何值，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

8、（04，10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

9、（06，10 分）试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中

$o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小

10、（08，9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

11、（09，9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

12、（11，10 分）已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，

试求 α 的取值范围

四、证明

1、（99，7 分）设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在

2、（02，8 分）设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限

3、（02，8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且

$f(0)\neq0,f'(0)\neq0,f''(0)\neq0$，证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当

$h\to0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小

4、（06，12 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$，（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

存在，并求此极限（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

5、（11，10 分）

（1）证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

（2）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\dfrac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明:数列 $\{a_n\}$ 收敛