第二章 数列极限

- 一、主要内容
- 1、数列极限的概念
- 2、收敛数列的性质
- 3、数列极限存在的条件的敛散性。

二、目的要求

- 1、熟练掌握数列极限的定义，能够利用ε-**N**语言证明数列是否有极限；
- 2、熟练掌握收敛数列的性质，能够通过这些性质对数列的敛散性进行判断；
- 3、掌握趋于无穷的数列的基本特征，并可以由此作出有关敛散性的判断；
- 4、熟练掌握单调有界的数列必有极限的定理；掌握数列的子列的概念；
- 5、掌握Cauchy收敛原理，并能够由它来判断数列的敛散性。

三、重点与难点

- 1、重点是数列极限的概念。
- 2、难点是数列极限的“$\varepsilon - N$ ”。

前页 后页 返回

§1 数列极限的概念

数列极限是整个数学分析最重要的基础之一，它不仅与函数极限密切相关，而且为今后学习级数理论提供了极为丰富的准备知识

一、数列的定义

二、一个经典的例子

三、收敛数列的定义

四、按定义验证极限

五、再论 “ε - N ”说法

六、一些例子

一、数列的定义

若函数 f 的定义域为全体正整数的集合 $\mathbf{N}_+$, 则称

$$f:\mathbf{N}_+ \to \mathbf{R} \text{ 或 } f(n),\ n\in\mathbf{N}_+$$

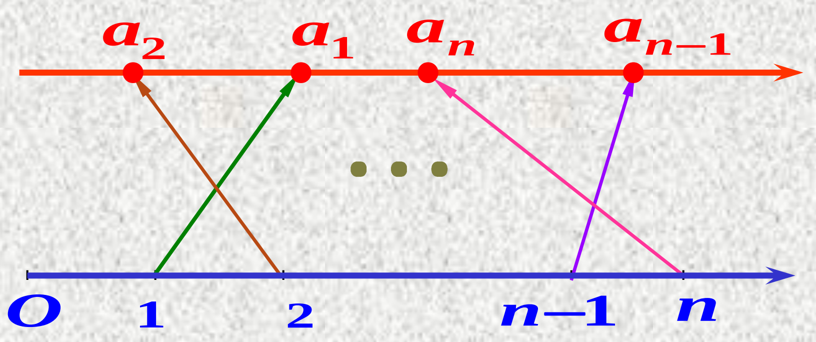
为数列.因为$\mathbf{N}_+$的所有元素可以从小到大排列出来,

所以我们也将数列写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简记为 $\{a_n\}$. 这里 a_n

称为数列 $\{a_n\}$ 的通项.



前页 后页 返回

二、一个经典的例子

古代哲学家庄周所著的《庄子 ·天下篇》引用了一句话:“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”. 它的意思是: 一根长为一尺的木棒, 每天截下一半, 这样的过程可以无限制地进行下去.

我们把每天截下部分 (或剩下部分) 的长度列出:

第一天截下 $\frac{1}{2}$, 第二天截下 $\frac{1}{2^2}$, $\cdots$, 第n天截下 $\frac{1}{2^n}$, $\cdots$ 这样就得到一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \text{或} \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

容易看出：数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限趋于 0 .

三、收敛数列的定义

一般地说, 对于数列 $\{a_n\}$, 若当 n 充分变大时, a_n 能无限地接近某个常数 a, 则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

下面给出严格的数学定义.

定义1 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, a 为一个常数, 若对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时,

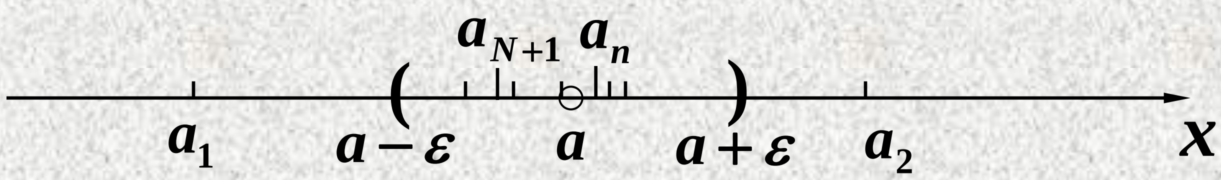
$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限,

记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$(\text{或 } a_n \to a,\ n \to \infty).$$



若$\{a_n\}$不收敛，则称$\{a_n\}$为发散数列.

注 定义1 这种陈述方式，俗称为 "ε - N"说法.

四、按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解, 下面结合例题加以说明, 希望大家对 "ε - N"说法能有正确的认识.

例1 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

分析 对于任意正数 ε, 要使 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

证 对于任意的正数 ε, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时,

$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

例2 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0<|q|<1)$.

分析 对于任意的正数 ε, 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$，只要

$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}.$$

证 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$), 取 $N=\left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]$,

当 $n>N$ 时,有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例3 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

分析 任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|,$$

当 $n\geq 7$ 时, $n+7\leq 2n$, $3n^2-n-7\geq 3n^2-2n\geq 2n^2$,

故要使 $\left|\dfrac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|\leq\dfrac{2n}{6n^2}=\dfrac{1}{3n}<\varepsilon$ 成立,

只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

注意 解这个不等式是在 $n \geq 7$ 的条件下进行的.

证 对于任意的正数 ε, 取

$$N = \max\left\{7, \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\},$$

当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

即得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

例4 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证 这里只验证 $a>1$ 的情形（$0<a<1$ 时自证）.

设 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$. 因为 $a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n$, 所以

$$0<\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}.$$

故对于任意正数 ε, 取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

因此证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

前页 后页 返回

五、再论“ε - N”说法

从定义及上面的例题我们可以看出：

1. ε的任意性: 定义中的 ε用来刻画数列 $\{a_n\}$ 的通项与定数 a 的接近程度. 显然正数 ε愈小,表示 a_n 与 a 接近的程度愈高；ε是任意的，这就表示 a_n 与 a 可以任意接近.要注意，ε 一旦给出，在接下来计算 N 的过程中，它暂时看作是确定不变的.

此外，又因 ε是任意正数，所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{2}, \cdots$ 等

均可看作任意正数，故定义 1 中的不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

可以用 $|a_n - a| < K\varepsilon$ （ K 为某一正常数) 来代替.

再有，我们还可以限定 ε 小于某一个正数 (比如 $\varepsilon < 1$). 事实上，对 $0 < \varepsilon < 1$ 若能验证 $\{a_n\}$ 满足定义 1，那么对 $\varepsilon \geq 1$ 自然也可以验证成立.

2. N 的相对性: 从定义1 中又可看出，随着 ε 的取值不同，N 当然也会不同. 但这并不意味着 N 是由

ε 惟一确定. 例如, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则当 $n > N_1 = 2N$ 时, 对于同样的 ε, 更应有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

也就是说, 在这里只是强调 N 的存在性, 而不追求 N 的 “ 最佳性 ” .

3. 极限的几何意义

从几何上看,“$n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$”,实际上就是所有下标大于 N 的 a_n 全都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$之内,而在 $U(a;\varepsilon)$ 之外, $\{a_n\}$ 至多只有有限项(N 项).

反过来, 如果对于任意正数ε, 落在$U(a;\varepsilon)$之外至多只有有限项, 设这些项的最大下标为 N, 这就表示当 $n > N$ 时, $a_n \in U(a;\varepsilon)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

前页 后页 返回

以上是定义 1 的等价说法，写成定义就是:

定义1' 任给 $\varepsilon > 0$ ，若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 的有限多项，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a. 这样，$\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为:存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得在 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 之外含有 $\{a_n\}$ 中的无限多项.

注 $\{a_n\}$无极限（即发散）的等价定义为: $\{a_n\}$ 不以任何实数 a 为极限.

4. 无穷小数列和无穷大数列

定义2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列. 当 $|q|<1$ 时, $\{q^n\}$

是无穷小数列.

以下定理显然成立,请读者自证.

定理2.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是: $\{a_n - a\}$

是无穷小数列.

定义3 设$\{a_n\}$是一数列, 若对任意$G>0$,总存在正整数N,使得任意$n>N$,$|a_n|>G$,则称$\{a_n\}$是无穷大数列, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

若$|a_n|>G$,改为$a_n>G$或$a_n<-G$,则称$\{a_n\}$是正无穷大数列或负无穷大数列, 分别记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

六、一些例子

为了更好地理解"$\varepsilon - N$"定义, 再举一些例题.

例5 证明$\{(-1)^n\}$发散.

证 对于任意实数 a, 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$满足:

当 $a \le 0$ ($a \ge 0$) 时, 在 $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ 之外有无限多个偶数项（奇数项）. 所以由定义1', $\{a_n\}$ 不以 a 为极限. 又因 a 是任意的, 所以$\{a_n\}$发散.

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

解 $|a|>1$ 时, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]!}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{[|a|]}\ \overbrace{|a|\cdots|a|}^{n-[|a|]}}{1\cdot 2\cdots[|a|][|a|+1]\cdots n}\le\frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!}\cdot\frac{|a|}{n}<\varepsilon.$$

当 $0<|a|\le 1$ 时, 取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n>N$ 时, $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

前页 后页 返回

注 这里我们将 N 取为正数，而非正整数. 实际上 N 只是表示某个时刻，保证从这一时刻以后的所有项都能使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立即可.

例7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

证 任给正数 ε，取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$，当 $n > N$ 时，

$$\left| \sin\frac{1}{n} - 0 \right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些性质？然后学习怎样运用这些性质.

一、惟一性

二、有界性

三、保号性

四、保不等式性

五、迫敛性(夹逼原理)

六、极限的四则运算

七、一些例子

一、唯一性

定理 2.2 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对于任何正数 $\varepsilon > 0$,

$\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon; \tag{1}$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

前页 后页 返回

$$|a_n - b| < \varepsilon. \tag{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2)同时成立,

从而有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $a = b$.

二、有界性

定理 2.3 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 为有界数列，即存在 $M > 0$，使得 $|a_n| \le M$，$n = 1, 2, \cdots$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于正数 $\varepsilon = 1$，$\exists N$，$n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < 1, \quad \text{即 } a - 1 < a_n < a + 1.$$

若令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a-1|, |a+1|\}$，

则对一切正整数 n，都有 $|a_n| \le M$.

前页 后页 返回

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件.

三、保号性

定理 2.4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于任意两个实数 b, c，$b < a < c$，则存在 N，当 $n > N$ 时，$b < a_n < c$.

证 取 $\varepsilon = \min\{a-b,\ c-a\} > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，

$$b \le a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \le c,\quad 故\ b < a_n < c.$$

注 若 $a > 0$ (或$a < 0$)，我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$ (或 $c = \dfrac{a}{2}$)，则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$).

这也是为什么称该定理为保号性定理的原因.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$， 所以由

定理 2.4, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

四、保不等式性

定理 2.5 设$\{a_n\},\{b_n\}$均为收敛数列，如果存在正数N_0，当$n>N_0$时，有$a_n\le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若$b<a$，取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，由保号性定理，存在$N>N_0$，当$n>N$时，

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故$a_n>b_n$，导致矛盾. 所以$a\le b$.

前页 后页 返回

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$，

也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这就是说，即使条件是严格不等式，结论却不一定是严格不等式.

例如，虽然 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

五、迫敛性（夹逼原理）

定理 2.6 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$都以 a 为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在 N_0,当 $n>N_0$ 时，有 $a_n \le c_n \le b_n$，则$\{c_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证 对任意正数ε,因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，所以分别存在 N_1, N_2，使得当 $n>N_1$ 时，$a-\varepsilon<a_n$;

当$n>N_2$时，$b_n<a+\varepsilon$. 取 $N=\max\{N_0, N_1, N_2\}$，

当 $n>N$ 时，$a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon$. 这就证得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

例2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 设$h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, 则有

$$n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n \geq 2),$$

故 $1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1,$$

所以由迫敛性，求得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

六、四则运算法则

定理2.7 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列则$\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$ 也都是收敛数列, 且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 当 b_n为常数 c 时,

$\lim\limits_{n\to\infty}cb_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) 若 $b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, 则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N ,

当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$, 所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n .$$

证明 (2) 因 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 设 $|b_n| \le M$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

前页 后页 返回

于是 $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$

$$\le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由ε 的任意性，证得

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 (3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$，由(2)，只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

由于 $b \ne 0$，据保号性，$\exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon,$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \le \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \le \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

七、一些例子

例3 用四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $m \le k$, $a_m b_k \neq 0$.

解 依据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0 \ (\alpha > 0)$, 分别得出:

(1) 当 $m=k$ 时，有

前页 后页 返回

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{m-1}} + a_0\frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{m-1}} + b_0\frac{1}{n^m}}$$

$$= \frac{a_m}{b_m}.$$

(2) 当 $m < k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n + b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-m}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_k + b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{k-1}}+b_0\frac{1}{n^k}}$$

$$=0\cdot\frac{a_m}{b_k}=0.$$

所以

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, & m=k,\\ 0, & m<k.\end{cases}$$

前页 后页 返回

例4 设 $a_n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于$a_n \ge 0$, 根据极限的保不等式性, 有$a \ge 0$.

对于任意 $\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于

是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} .$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

例5 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，根据极限的保号性, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m}\, a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\, a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

定义1 设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N_+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的子列, 简记为$\{a_{n_k}\}$.

注 由定义,$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项均选自$\{a_n\}$,且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序.$\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项, 故总有$n_k \geq k$.

定理 2.8 若数列$\{a_n\}$收敛到a,则$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$也收敛到a.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列. 由于$n_k \ge k$,因此$k > N$时, $n_k \ge k > N$, 亦有$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知, 若一个数列的两个子列收敛于不同的值, 则此数列必发散.

例7 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a.$$

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为$2n > N, 2n-1 \geq N$, 所以

$$|a_{2n\text{-}1} - a| < \varepsilon, \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(充分性) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,

当 $k > N$ 时,

前页 后页 返回

$$|a_{2k-1}-a|<\varepsilon,\ |a_{2k}-a|<\varepsilon.$$

令 $N=2K$, 当 $n>N$ 时, 则有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

前页 后页 返回

例8 若 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

解 显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}-(1-\frac{1}{2k-1})=-1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k}=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2k})=1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.

§3 数列极限存在的条件

学过数列极限概念后，自然会产生两个问题：一是怎么知道一个数列是收敛的？即极限的存在性问题；二是如何计算数列的极限？其中，判断数列是否收敛，这在极限理论中占有非常重要的地位.

下面就极限存在性问题，介绍两个重要定理.

一、单调有界定理

二、柯西收敛准则

一、单调有界定理

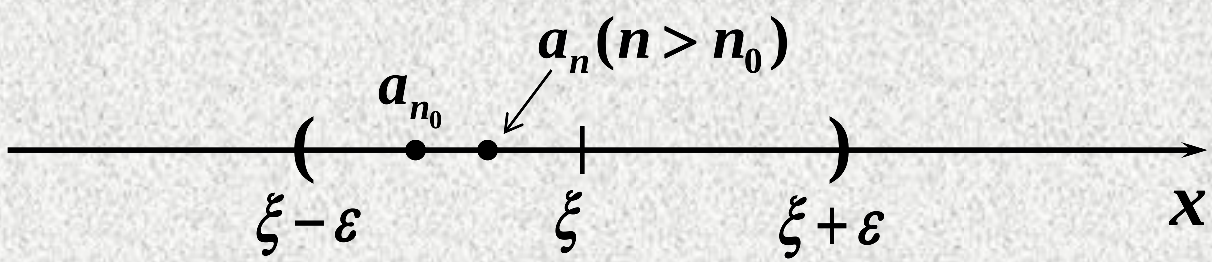
定理 2.7 单调有界数列必有极限.

证 该命题的几何意义是十分明显的.

不妨设 $\{a_n\}$ 单调增，有上界. 由确界定理，存在

$\sup\{a_n\}=\xi$. 由上确界的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$,

存在 a_{n_0}, 使 $a_{n_0}>\xi-\varepsilon$. 故当 $n>n_0(=N)$ 时,



前页 后页 返回

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \xi < \xi + \varepsilon ,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi.$

例1 设 $a_1 = \sqrt{2}, \cdots, a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}, \cdots,$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

解 显然 $a_n > 0$. 因 $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, 故 $a_2 > a_1$; 设

$a_n > a_{n-1}$, 则有

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}} > 0,$$

前页 后页 返回

所以$\{a_n\}$递增. 下面再来证明此数列有上界.

显然，$a_1=\sqrt{2}<2$，设 $a_n<2$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2.$$

由此得到 $\{a_n\}$有上界 2，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在 .

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$，可得

$$A^2=2+A，并解出\ A=2,\ A=-1.$$

由极限的不等式性，知道 $A>0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

例2 下面的叙述错在哪儿?

“设 $a_n = 2^n,\ n = 1, 2, \cdots,$ 则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

因为显然有 $a_n > 0,$ 所以 $\{a_n\}$ 递增. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A,$

从而得出

$$A = 2A \Rightarrow A = 0,$$

即 $\lim_{n\to\infty} 2^n = 0.$ ”

以前知道圆周率 π 是一个重要的无理数, 现在来介绍另一个重要的无理数 e.

考察数列 $\{e_n\}=\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 的收敛性, 下面的证法是最基本的, 而教材上的证法技巧性较强.

利用二项式展开, 得

$$e_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}), \quad (1)$$

由此得

$$e_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

把 e_n 和 e_{n+1} 的展开式作比较就可发现, e_n 的展开式有 $n+1$ 项, 其中的每一项都比 e_{n+1} 的展开式中的前 $n+1$ 项小, 而 e_{n+1} 的最后一项大于零. 因此

前页 后页 返回

$$e_n < e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

从而 $\{e_n\}$ 是单调增数列, 且

$$e_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

由此 $e_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$

这就证明了 $\{e_n\}$ 又是有界数列. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ 存在.

记此极限为 e ,即

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

*例3 设 $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \cdots,$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$

证 显然$\{s_n\}$是单调增数列, 且由例2中的(2)式,

$$e_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$= s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在且由极限的保不等式性,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} s_n.$$

又对任意 $n > m$,

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n}),$$

因此,在上式中两边令 $n \to \infty$, 得

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

当 $m \to \infty$ 时,由极限的保不等式性, $\mathrm{e} \geq \lim\limits_{m\to\infty} s_m$.

从而

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

由公式 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$, 可以较快地算出 e 的近似值.

前页 后页 返回

由于

$$0 < s_{n+m} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!},$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$0 < \mathrm{e} - s_n \le \frac{1}{n!n}, n = 1, 2, \cdots.$$

取 $n = 10$, $\mathrm{e} \approx s_{10} \approx 2.7182818$, 其误差

$$0 < \mathrm{e} - s_{10} \le \frac{1}{10 \cdot 10!} < 10^{-7}.$$

例4　设 S 是有界数集.证明:若 $\sup S = a \notin S$,则存在严格单调增数列 $\{x_n\} \subset S$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证　因 a 是 S 的上界, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$,使得 $x > a - \varepsilon$.又因 $a \notin S$,故 $x < a$,从而有

$$a - \varepsilon < x < a.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1$,则 $\exists x_1 \in S$,使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a.$$

再取 $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, a - x_1\}$,则 $\exists x_2 \in S$,使得

前页 后页 返回

$$a-\varepsilon_1 < x_2 < a,$$

且有 $x_2 > a-\varepsilon_2 \ge a-(a-x_1) = x_1$.

一般地,按上述步骤得到 x_{n-1} 之后, 取

$$\varepsilon_n = \min\{\frac{1}{n}, a-x_{n-1}\},$$

则存在 $x_n \in S$,使得

$$a-\varepsilon_n < x_n < a,$$

且有 $x_n > a-\varepsilon_n \ge a-(a-x_{n-1}) = x_{n-1}$.

于是得到$\{x_n\} \subset S$,它是严格单调的, 满足

$$a-\varepsilon_n < x_n < a,$$

因此, $\left|x_n - a\right| < \varepsilon_n \le \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots.$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

二、柯西收敛准则

定理 2.8 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:

对于任意正数ε，存在 $N>0$，当 $n,m>N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

柯西准则的充要条件可用另一种形式表达为:

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0,$ 当 $n>N$ 时, 对任意 $p\in \mathrm{N}_+$, 均有

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

满足上述条件的数列称为柯西列.

由于该定理充分性的证明需要进一步的知识，因此这里仅给出必要性的证明.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n, m > N$ (或 $n, m \geq N$) 时, 有

柯西(Cauchy,A.L. 1789—1857 ,法国)

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

前页 后页 返回

例5 设 $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 发散.

证 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N > 0$, $\exists n_0 = N$, $m_0 = 2N$, 使得

$$\left| x_{n_0} - x_{m_0} \right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

$$\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \varepsilon_0 .$$

由柯西收敛准则的否定陈述, 可知 $\{x_n\}$ 发散.

例6 设 $x_n = \dfrac{\sin 1}{2^1} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$.

求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \dfrac{-\log \varepsilon}{\log 2}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \right|$$

$$\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)$$

$$= \frac{2}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \le \frac{1}{2^m} < \varepsilon$$ $\Rightarrow \{x_n\}$ 收敛 .

例7 设数列满足条件：$|a_{n+1}-a_n|<r^n, n=1,2,\cdots,$

其中 $r\in(0,1)$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证 若 $n<m$, 则

$$|a_n-a_m|\le|a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|$$

$$\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}=\frac{r^n-r^m}{1-r}<\frac{r^n}{1-r}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1-r}=0$, 于是 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, n>N,$

$$\left|\frac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$$

前页 后页 返回

若 $m > n > N$, 就有

$$|a_n - a_m| \le \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon.$$

由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛.

注　柯西收敛准则的意义在于：可以根据数列通项本身的特征来判断该数列是否收敛，而不必依赖于极限定义中的那个极限值 A. 这一特点在理论上特别有用，大家将会逐渐体会到它的重要性.