高等数学（下册）

同济六版

南阳师范学院——数学与统计学院

李婧 制

第九章　多元函数微分法及其应用

一元函数微分学

$\Big\downarrow$ 推广

多元函数微分学

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一、 区域

1. 邻域

点集 $U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的**δ 邻域**.

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

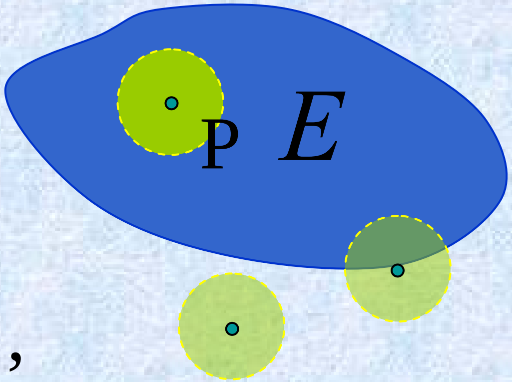
说明: 若不需要强调邻域半径δ, 也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

设有点集 E 及一点 P:

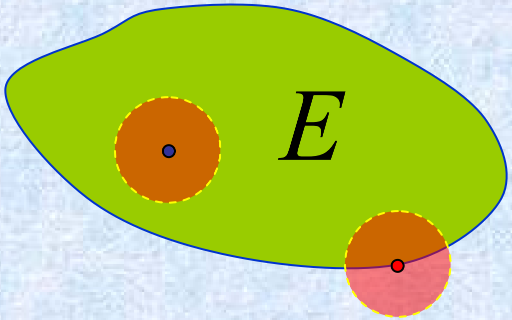


- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的**外点**;
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点, 则称 P 为 E 的**边界点**.

显然, E 的内点必属于 E E 的外点必不属于 E, E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E.

(2) 聚点

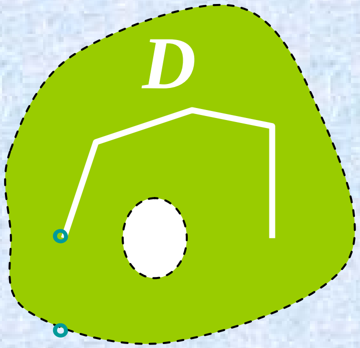
若对任意给定的δ，点P的去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$内总有E中的点，则称P是E的**聚点**.



聚点可以属于E，也可以不属于E (因为聚点可以为E的边界点)

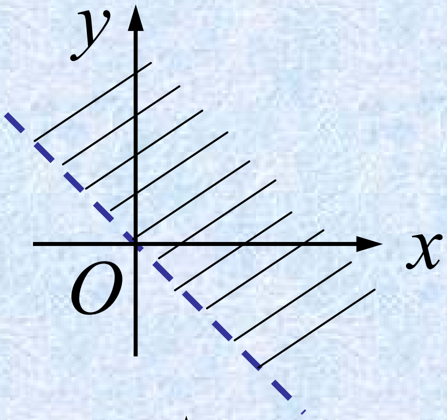
(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集;
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域 ;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

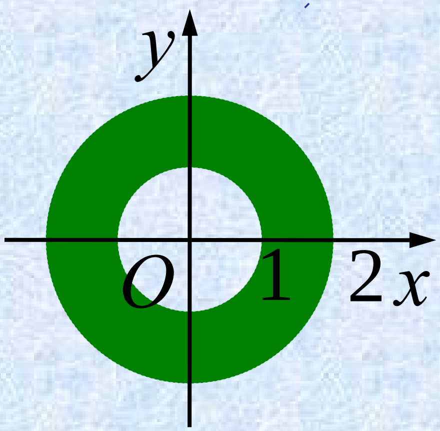


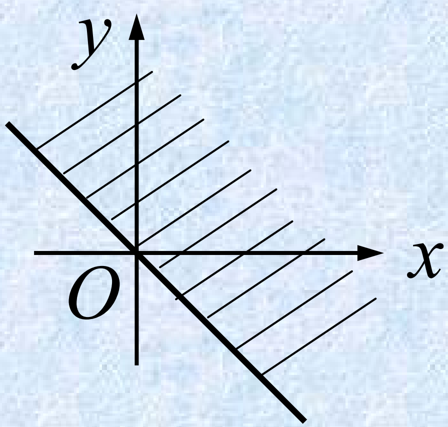
例如，在平面上

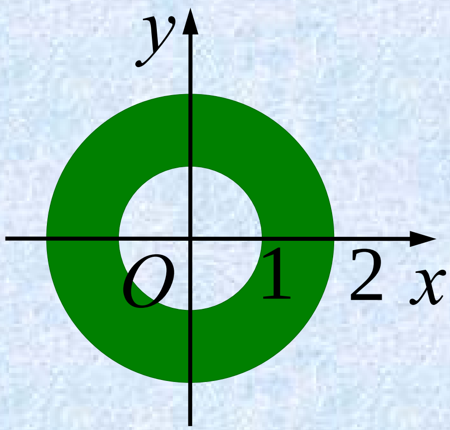
$$\left.\begin{array}{l}\{(x,y)\mid x+y>0\} \\ \{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}\end{array}\right]\text{开区域}$$



$$\left.\begin{array}{l}\{(x,y)\mid x+y\geq 0\} \\ \{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}\end{array}\right]\text{闭区域}$$





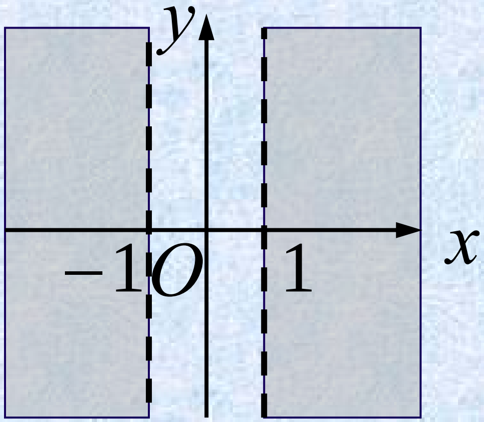


整个平面 是最大的开域，

也是最大的闭域；

点集$\{(x,y) \mid |x|>1\}$是开集，

但非区域.



对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$，则称 D 为**有界域**，否则称为**无界域**.

二、多元函数的概念

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域** .

特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathbf{R}^n$, P_0 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad (\text{也称为 } n \text{ 重极限})$$

当 $n=2$ 时，记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because\ \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$

要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad , & xy=0 \end{cases}$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|f(x,y)-0\right| \le \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon/2,$ 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$\left|f(x,y)-0\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

- 若当点$P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时, 函数趋于不同值或有的极限不存在, 则可以断定函数极限不存在 .

例3. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x\,,y)$ 沿直线 $y=k\,x$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同 !

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

例**4.** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

解: 因 $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$

$$1-\cos r^2 \sim \frac{r^4}{2}$$

四、多元函数的连续性

定义3. 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续, 否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点.

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\qquad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists\, K>0$, 使 $|f(P)|\le K,\ P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M],\exists\, Q\in D$,使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

例**5**. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

分析: 分子有理化.

解: 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

作 业

6 (2), (4), (6)

第二节　偏导数

一、偏导数的定义及其计算法

二、高阶偏导数

三、小结 思考题

一、偏导数

定义　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

函数对x的偏增量

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

即 $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

同理可定义函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或 $f_y(x_0,y_0)$.

偏导(函)数

设$z=f(x,y)$在区域D内每点(x,y)的偏导数都存在，

$$即 f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

则$f_x(x,y)$称为函数$z=f(x,y)$关于自变量x的偏导数。

偏导函数 $f_x(x,y)$ 与 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$的关系:

$$f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f_x(x_0,y_0)$$

$$f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f_y(x_0,y_0)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数.

例如，三元函数 $u = f(x, y, z)$在点(x, y, z)处对x 的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y, z) = ?$$

$$f_z(x, y, z) = ?$$

偏导数的计算

对二元函数$z=f(x,y)$:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ----视y为常数，　对x求导数;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ----视x为常数，　对y求导数。

同理，对三元函数$u=f(x,y,z)$:

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$----视$y,z$均为常数，对$x$求导数；其余类推。

例1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1, 2)处的偏导数.

解法1: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

解法2: $\left. z\right|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)} = \left.(2x+6)\right|_{x=1} = 8$$

$$\left. z\right|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)} = \left.(3+2y)\right|_{y=2} = 7$$

例2 设 $z = x^y$ ($x > 0$, 且 $x \neq 1$),求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证: $\because$ $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例3 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数.

解: $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

例4. 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R为常数)，

求证: $$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

证: $$p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$$

$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}$$

$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

说明：此例表明, 偏导数记号是一个整体记号, 不能看作分子与分母的商 ！

偏导数的几何意义

$$z = f(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

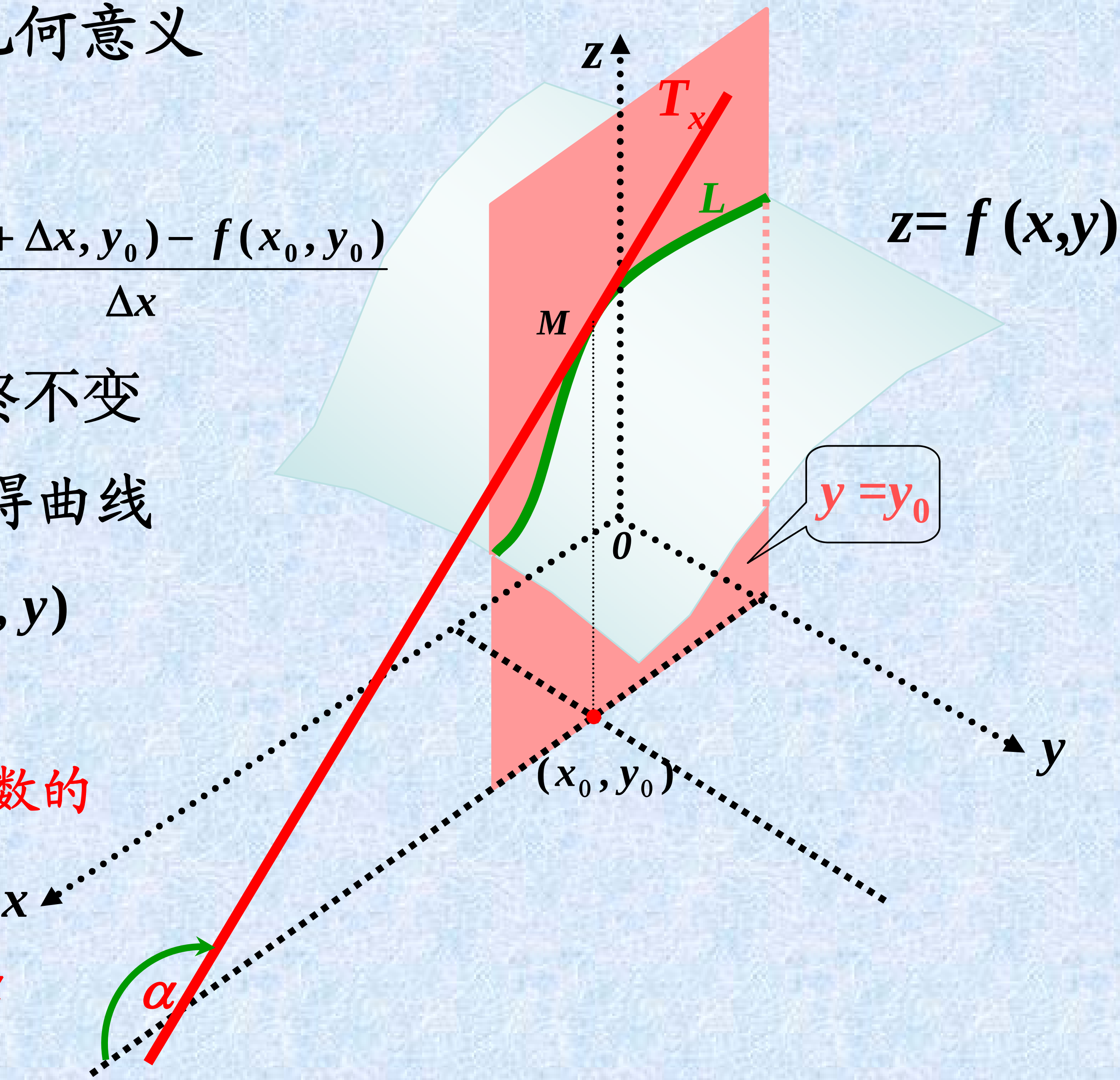
注意： y_0始终不变

固定 $y = y_0$ 得曲线

$$L: \begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

由一元函数导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M} = \tan\alpha$$



二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0} \text{是曲线} \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0} \text{是曲线} \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续。

思考：对于多元函数，各偏导数在某点都存在，能否保证函数在该点连续？

例　设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\text{时}\\ 0, & x^2+y^2=0\text{时}\end{cases}$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

但该函数在点（0,0）并不连续.

注意：分段函数在分段点处的偏导数必须用定义计算.

如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续。

思考：对于多元函数，各偏导数在某点都存在，能否保证函数在该点连续？

结论：对于多元函数，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续。

二、高阶偏导数

设$z = f(x, y)$在区域D内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z= f(x,y)$的二阶偏导数. 按求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

例5. 求函数$z=e^{x+2y}$的二阶偏导数。

解：$\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}}$ $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

注意: 此处 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

本定理对n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如，对三元函数$u=f(x,y,z)$，当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时，有

$$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)$$

$$=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$$

第三节　全微分

一、全微分的定义

一元函数 $y = f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

多元函数的微分如何定义呢?

一、全微分的定义

对x的偏增量

偏增量

$$\boxed{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)} \approx f_x(x, y)\Delta x$$

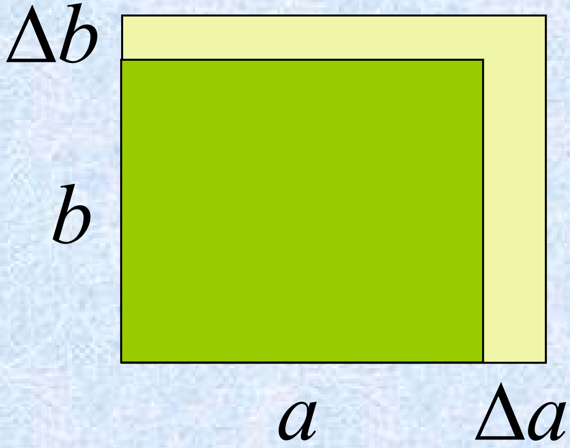
$$\boxed{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)} \approx f_y(x, y)\Delta y$$

对y的偏增量

全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

引例：设有一个矩形，其长、宽分别为a, b.由于环境温度变化， 它的长和宽分别改变了$\Delta a, \Delta b$，问其面积改变了多少？



若记面积改变量为ΔA. 则

$$\Delta A = \boxed{b\cdot\Delta a + a\cdot \Delta b} + \boxed{\Delta a\cdot \Delta b}$$

$\Delta a, \Delta b$的线性函数

$\Delta a\cdot\Delta b = o(\rho)$,

（其中$\rho = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$）

即 $\Delta A = b\cdot \Delta a + a\cdot \Delta b + \mathbf{o(\rho)}$

全微分定义

设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义，

若全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可表示成

$$\Delta z=\boxed{A\Delta x+B\,\Delta y}+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于Δx, Δy，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x,y)$ 在点(x,y) **可微分**，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

若函数在区域 D 内各点处都可微分, 则称此

函数在D 内可微分.

由微分定义 :

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得 $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y)$$

即

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(x,\ y)$ 可微分

$\longrightarrow$ 函数在该点连续

定理1 (必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微分**，则该函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且有

$$\mathrm{d}\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，令 $\Delta y=0$，得到对 x 的偏增量

$$=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$，因此有 $\mathrm{d}\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

思考：定理1的逆定理是否成立？

注意：定理1 的逆定理不成立．即：

偏导数存在，函数 不一定可微 ！

偏导数存在，函数 也不一定连续 ！

函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分 $\longrightarrow$ 函数在该点连续

反例: 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但

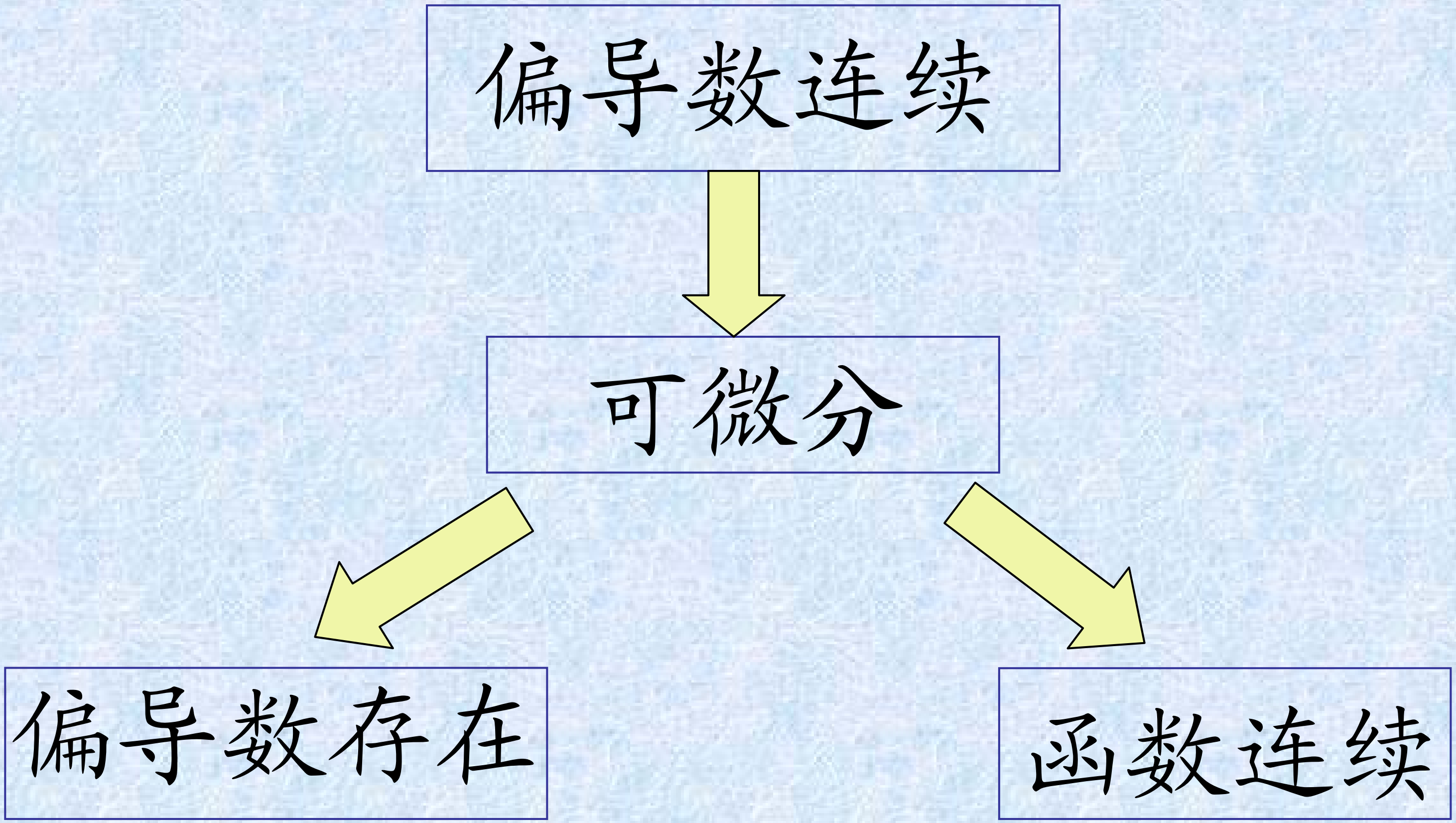
$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 $(0,0)$ 不可微分.

偏导数存在只是可微分的必要条件而不是充分条件.

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微分.



推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例1. 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\, z\Big|_{(2,1)} = e^2\,\mathrm{d}\,x + 2e^2\,\mathrm{d}\,y$$

例2. 计算函数 $u = x + \sin\dfrac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}\,u = 1 \cdot \mathrm{d}x + (\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{y}{2} + z\,e^{yz}\ )\,\mathrm{d}\,y + y\,e^{yz}\,\mathrm{d}z$

思考与练习

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，但偏导数在点 (0,0) 不连续，而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

说明：此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.

作业

1 (1) (3)； 2

第四节　多元复合函数的求导法则

一、多元复合函数求导的链式法则

二、多元复合函数的全微分

回顾

一元复合函数 $y = f(u),\ u = \varphi(x)$

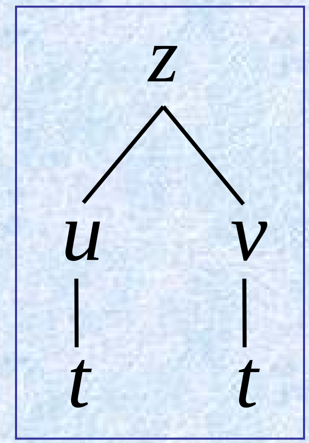
求导法则 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

微分法则 $$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u = f'(u)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

一、多元复合函数求导的链式法则

定理. 若函数 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 在点 t 可导, $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处偏导连续, 则复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 在点 t 可导, 且有链式法则

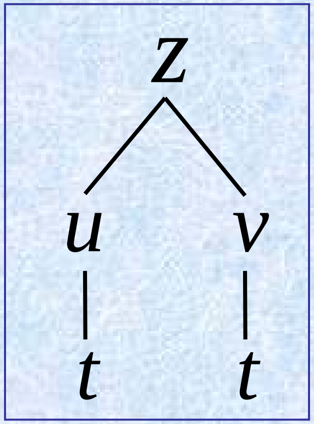
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



证: 设 t 取增量 Δt, 则相应中间变量有增量 $\Delta u, \Delta v$,

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho) \quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}\quad(\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\ )$$



令 $\Delta t\to 0$, 则有 $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\to 0$$

($\triangle t<0$ 时, 根式前加"–"号)

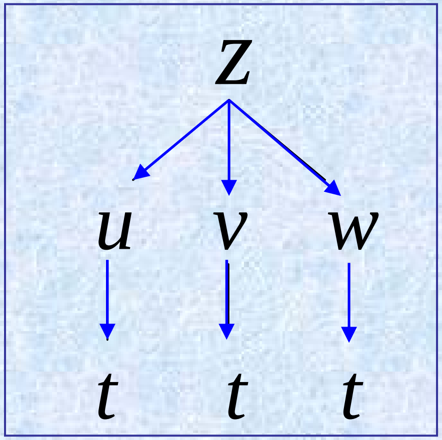
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

(全导数公式)

推广：设下面所涉及的函数都可微．

1、中间变量多于两个的情形．例如，$z = f(u, v, w)$，

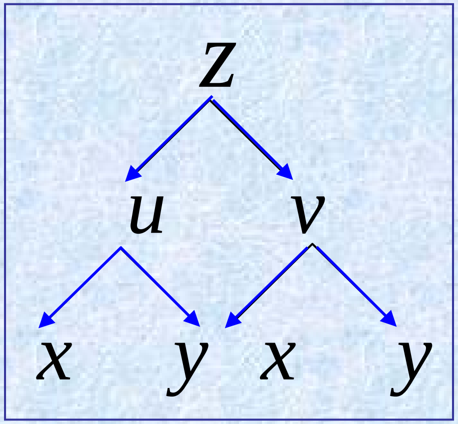
$u = \varphi(t), v = \psi(t), w = \omega(t)$



$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

2、中间变量是多元函数的情形(**定理2**)

$z = f(u, v)$，　$u = \varphi(x, y)$，　$v = \psi(x, y)$



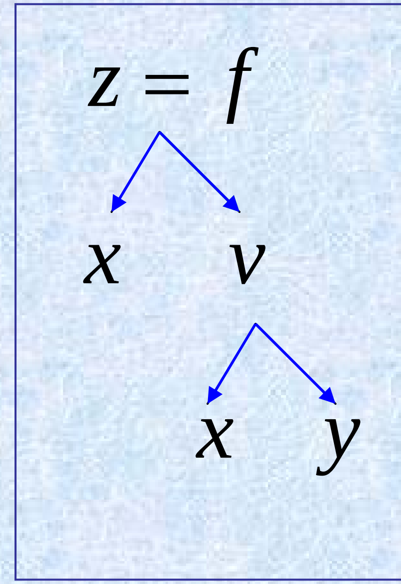
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

又如, $z = f(x,v),\ v = \psi(x,y)$

当它们都具有可微条件时, 有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$



注意: 这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不同,

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 表示固定 y 对 x 求导, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示固定 v 对 x 求导

分段用乘, 分叉用加, 一元全导, 多元偏导

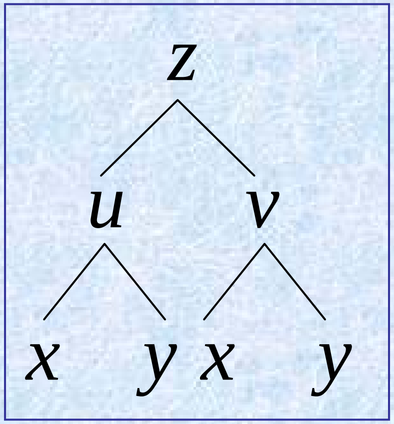
例**1.** 设 $z = e^u \sin v$，$u = xy$，$v = x + y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1$$

$$= e^{xy}[y\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1$$

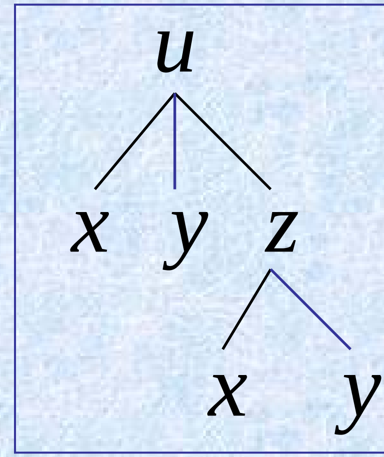
$$= e^{xy}[x\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

例**2.** $u = f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$, $z = x^2 \sin y$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$= 2xe^{x^2+y^2+z^2} + 2ze^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x \sin y$$

$$= 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y}$$



$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= 2ye^{x^2+y^2+z^2} + 2ze^{x^2+y^2+z^2} \cdot x^2 \cos y$$

$$= 2(y + x^4 \sin y \cos y) e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y}$$

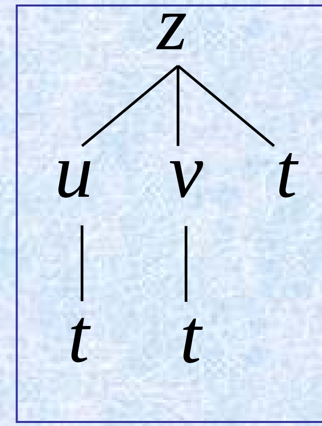
例3. 设 $z = uv + \sin t,\ u = e^{t},\ v = \cos t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= v e^{t} - u\sin t + \cos t$$

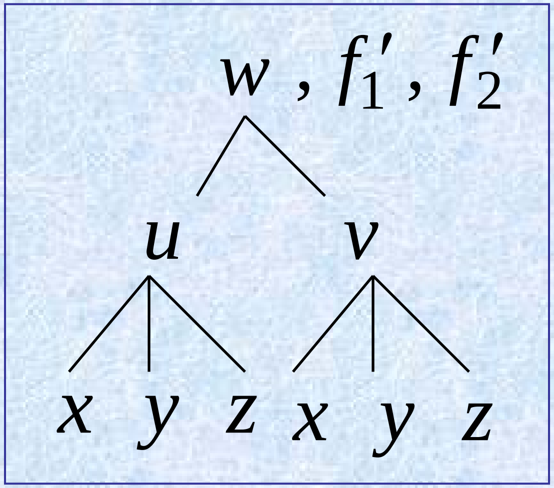
$$\boxed{= e^{t}(\cos t - \sin t) + \cos t}$$



最终的结果只含变量t,
不含中间变量u，v.

例**4.** 设 $w = f(x+y+z, xyz)$, f 具有二阶连续偏导数,

求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.



解: 令 $u = x+y+z$, $v = xyz$, 则

$$w = f(u, v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot yz$$

$$= f_1'(x+y+z, xyz) + yz\, f_2'(x+y+z, xyz)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = f_{11}'' \cdot 1 + f_{12}'' \cdot xy + y\, f_2' + yz[\, f_{21}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot xy]$$

$$= f_{11}'' + y(x+z)\, f_{12}'' + xy^2 z\, f_{22}'' + y\, f_2'$$

二、多元复合函数的全微分

设函数 $z=f(u,v),\, u=\varphi(x,y),\, v=\psi(x,y)$ 都可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

可见无论 u,v 是自变量还是中间变量，其全微分表达形式都一样，这性质叫做**全微分形式不变性**.

课堂练习

2，4，7，8（1）

作业

1;　3;　8 (3)

第五节　隐函数的求导方法

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

定理1. 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内满足

① 具有连续的偏导数;

② $F(x_0, y_0) = 0$;

③ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则方程 $F(x,y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$，满足条件 $y_0 = f(x_0)$，并有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

设 $y = f(x)$ 为方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内 $F_y \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

若$F(x,y)$的二阶偏导数也都连续，则还有

二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{F_x}{F_y} \\ x \quad y \\ \quad\ x \end{array}}$$

例1. 验证方程 $\sin y + e^x - xy - 1 = 0$ 在点(0,0)某邻域可确定一个可导隐函数 $y = f(x)$，并求

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

解： 令 $F(x,y) = \sin y + e^x - xy - 1$，则

① $F_x = e^x - y,\ F_y = \cos y - x$ 连续，

② $F(0,0) = 0$,

③ $F_y(0,0) = 1 \neq 0$

由 定理1 可知，在 $x = 0$ 的某邻域内方程存在可导的隐函数 $y = f(x)$，且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{x=0} = -\left.\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right|_{x=0,\, y=0} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - y}{\cos y - x}\right)\Bigg|_{x=0,\ y=0,\ y'=-1}$$

$$= -\frac{(e^x - y')(\cos y - x) - (e^x - y)(-\sin y \cdot y' - 1)}{(\cos y - x)^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$= -3$$

定理2. 若函数$F(x,y,z)$满足:

① 在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内具有**连续偏导数**,

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$,满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

设 $z = f(x, y)$ 是方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$$

两边对 x 求偏导

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$$

在 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内 $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

例**2**. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $F_x=2x,\ F_z=2z-4$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2}=\frac{x}{2-z}$$

两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例3. 设$F(x, y)$具有连续偏导数, 已知方程 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, 求 dz.

解法1 利用偏导数公式. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ 确定的隐函数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1' \cdot \frac{1}{z}}{F_1' \cdot (-\frac{x}{z^2}) + F_2' \cdot (-\frac{y}{z^2})} = \frac{z F_1'}{x F_1' + y F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2' \cdot \frac{1}{z}}{F_1' \cdot (-\frac{x}{z^2}) + F_2' \cdot (-\frac{y}{z^2})} = \frac{z F_2'}{x F_1' + y F_2'}$$

故 $$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{z}{x F_1' + y F_2'}(F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y)$$

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

隐函数存在定理还可以推广到方程组的情形.

以两个方程确定两个隐函数的情况为例，即

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

称为F、G 的**雅可比(Jacobi)**行列式.

定理3. 设函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 满足:

① 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数;

② $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$;

③ $J\Big|_P = \dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\Big|_P \neq 0$

则方程组 $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$在点$(x_0, y_0, u_0, v_0$

的某一邻域内可唯一确定一组满足条件 $u_0 = u(x_0, y_0)$,

$v_0 = v(x_0, y_0)$的连续且具有连续偏导数的函数$u = u(x, y)$,

$v = v(x, y)$,且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{x},v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{y},v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{x})}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{y})}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

设方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$有隐函数组$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$,则

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导得 $\begin{cases} F_x+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$

这是关于$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组, 在点$P$的某邻域内

系数行列式 $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\neq 0$, 故得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例4. 设 $xu - yv = 0,\ yu + xv = 1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解: 方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

由题设 $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$

故有 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix} = -\dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

例5. 设函数 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ 在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

1) 证明函数组 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 在与点 (u,v) 对应的点 (x,y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

2) 求 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 对 x, y 的偏导数.

解: 1) 令 $F(x,y,u,v) \equiv x - x(u,v) = 0$

$$G(x,y,u,v) \equiv y - y(u,v) = 0$$

则有 $$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

由定理 3 可知结论 1) 成立.

2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases} \qquad ①$$

①式两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad ②$$

注意$J \neq 0$，从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理, ①式两边对 y 求导, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

思考与练习

1. 设 $u = f(x, y, z)$有连续的一阶偏导数，

又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy} - xy = 2$, $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. **(01考研)**

2. 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$是由方程 $z = x f(x + y)$和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. **(99考研)**

作业

3 ， 7 ， 10 (2)

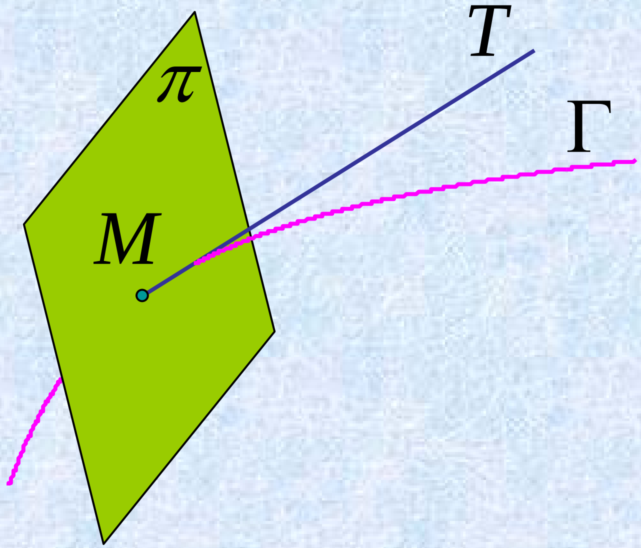
第六节 多元函数微分学的几何应用

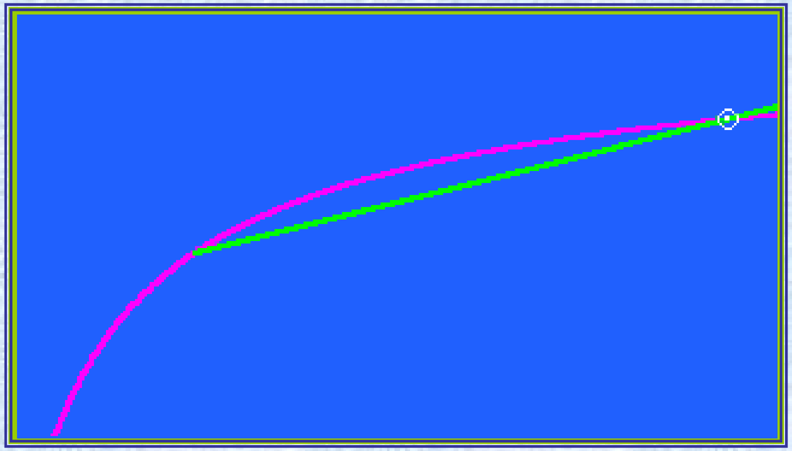
一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

一、空间曲线的切线与法平面

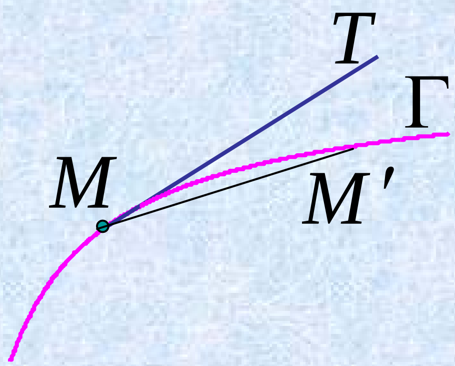
空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.





点击图中任意点动画开始或暂停

1. 曲线方程为参数方程的情况



$$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

设 $t=t_0$ 对应 $M(x_0, y_0, z_0)$

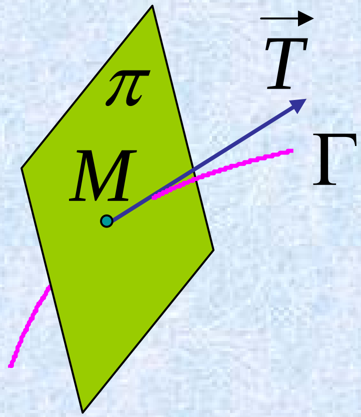
切线的方向向量:

$$\overrightarrow{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

称为曲线的**切向量**.

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

点**M**处的切向量



$$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

$\vec{T}$ 也是法平面的法向量, 因此得**法平面方程**

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

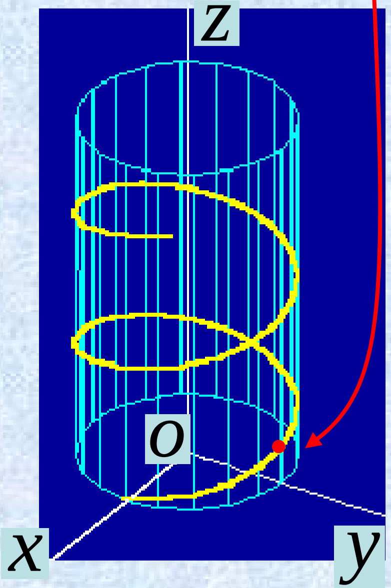
例1. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x' = -R\sin\varphi,\ y' = R\cos\varphi,\ z' = k,$ 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\overrightarrow{T} = (-R, 0, k)$, 故

$M_0(0, R, \frac{\pi}{2}k)$

切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$



法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$

2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$$

$$=\left\{1,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$$

或 $$\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 M (1,–2, 1) 处的切线方程与法平面方程.

解 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 M(1,–2, 1) 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

二、曲面的切平面与法线

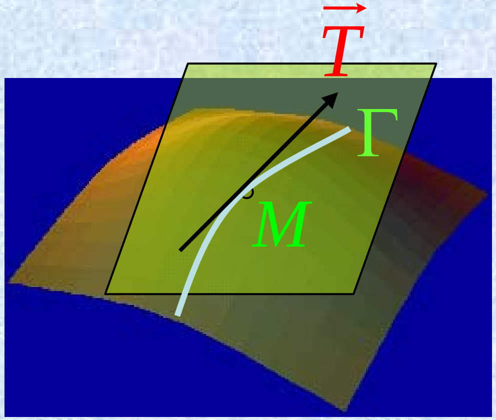
设有光滑曲面 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$

通过其上定点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，设 $t = t_0$ 对应点 M，且

$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 不全为0．则 Γ 在

点 M 的**切向量为**



$$\vec{T} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

切线方程为
$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明: $\sum$ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上.

证: $\because \Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$ 在 $\sum$ 上,

$$\therefore \quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$$

两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得

$$\boxed{\begin{aligned}F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)\\+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0\end{aligned}}$$

令 $\overrightarrow{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$$\overrightarrow{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切向量 $\overrightarrow{T}\perp\overrightarrow{n}$

切向量$\vec{T} \perp \vec{n}$

由于曲线Γ的任意性，表明这些切线都在以$\vec{n}$为法向量的平面上.

结论：Σ上过点M的任何曲线在该点的切线都在同一***平面***上.

此平面称为Σ在该点的**切平面**.

曲面 $\sum$ 在点 M 的法向量

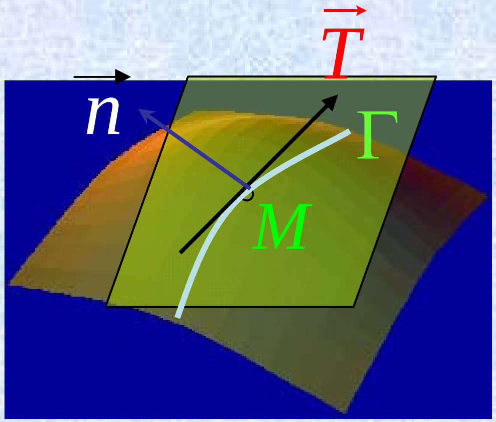
$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



特别，当光滑曲面Σ的方程为显式$z = f(x, y)$时，令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

则在点(x, y, z)，$F_x = f_x, F_y = f_y, F_z = -1$

故当函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)有连续偏导数时，曲面Σ在点(x_0, y_0, z_0)有

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $\dfrac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

例3. 求球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点$(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{9}$$

例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0\,,x_0z_0\,,x_0y_0)\,,\quad \vec{n}_2=(x_0\,,y_0\,,z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0{}^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0{}^2}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0{}^2}$$

$$\therefore \qquad x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\qquad \sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ.

2. 设 $f(u)$ 可微,证明 曲面 $z=xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

3. 证明曲面 $F(x-my,z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行,其中$F(u,v)$可微.

作业

2，3，4，5，8，9，10

第七节　方向导数与梯度

一、问题的提出

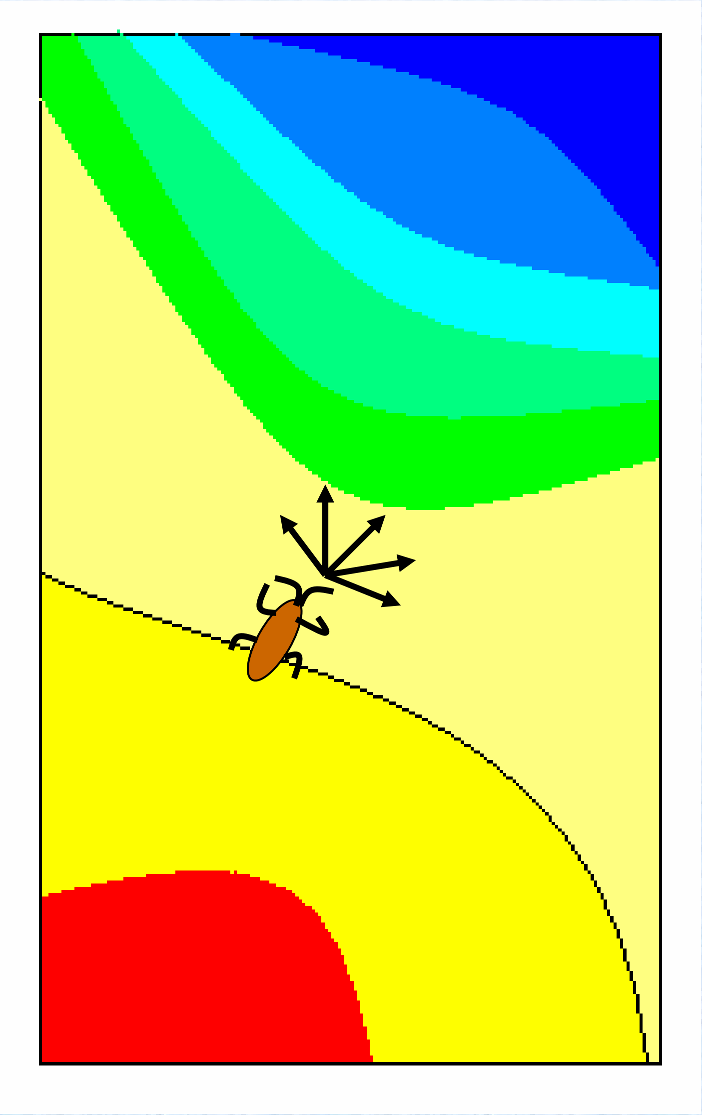
二、方向导数

三、梯度

一、问题的提出

一块长方形的金属板，受热产生如图温度分布场.

设一个小虫在板中逃生至某处，问该虫应沿什么方向爬行，才能最快到达凉快的地点?



问题的实质:

应沿由热变冷变化最剧烈的方向爬行.

需要计算场中各点沿不同方向的温度变化率，

方向导数问题

从而确定出温度下降的最快方向

梯度问题

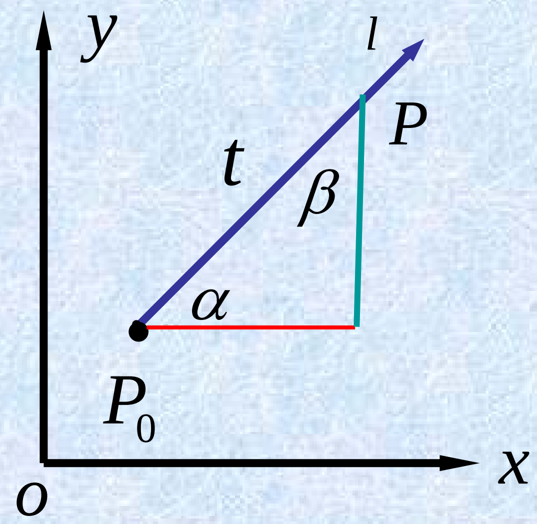
引入两个概念：方向导数和梯度

二、方向导数

讨论函数 $z=f(x,y)$在一点P沿某一方向的变化率问题.

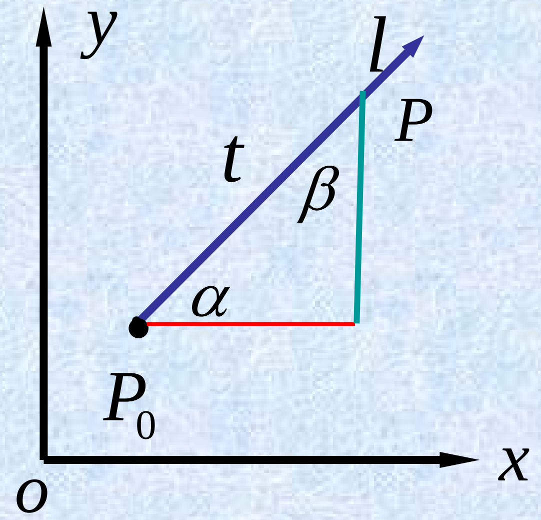
设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0)$ 内有定义，自点 P_0 引射线 l.

$P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$ 为 l 上另一点，且 $P\in U(P_0)$.



$\because |PP_0| = t$

且函数增量 $\Delta z = f(P) - f(P_0)$,

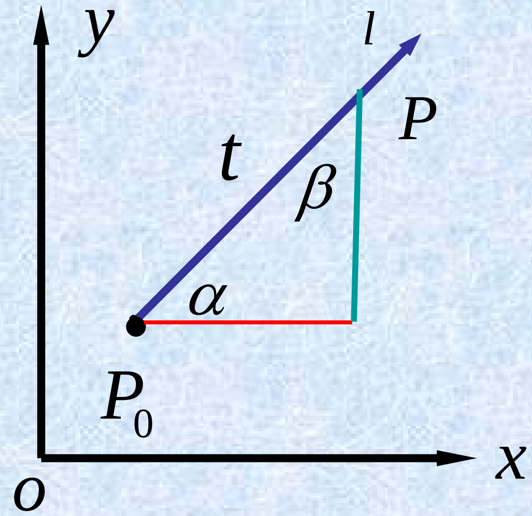


考虑 $\dfrac{\Delta z}{t}$, 当 P 沿着 $\boldsymbol{l}$ 趋于 P_0 时,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

是否存在?

定义　函数增量 $f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$ 与 PP_0 两点间的距离的比值，当 P 沿着 l 趋于 P_0 时，如果此比的极限存在，则称这极限为函数在点 P_0 沿方向 l 的方向导数.

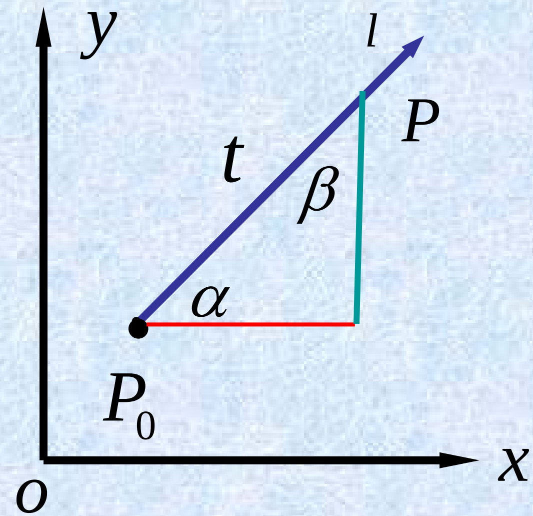


记为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\boxed{= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{t}}$$



方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

思考：方向导数和偏导数之间的关系？

依定义，函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿着 x 轴正向 $\vec{e}_1=\{1,0\}$、y 轴正向 $\vec{e}_2=\{0,1\}$ 的方向导数分别为 f_x, f_y；

沿着 x 轴负向、y 轴负向的方向导数是 $-f_x, -f_y$.

$\boxed{\text{若方向导数存在，则偏导数是否一定存在？}}$

例如，$z=\sqrt{x^2+y^2}$在$O(0,0)$处沿$l=\vec{i}$方向的方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1$，而偏导数$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$不存在.

原因：

方向导数是单侧极限，而偏导数是双侧极限.

偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 沿任意方向的方向导数存在.

方向导数的存在及计算公式

定理 如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微分，

那么函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，

且有

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为方向 l 的方向余弦.

例 1 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向的方向导数.

解 方向l即为$\overrightarrow{PQ}=\{1,-1\}$

$$\because \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2,$$

所求方向导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=\cos(-\frac{\pi}{4})+2\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

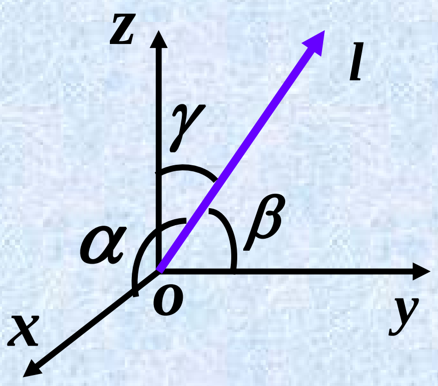
练习.

求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点 $P(2,3)$ 沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数.

推广: 三元函数方向导数的定义

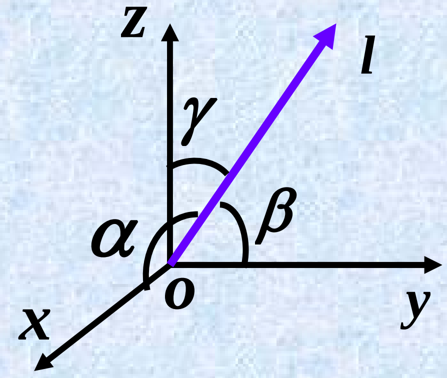
对于三元函数 $u = f(x, y, z)$, 它在空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 沿着方向 $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$



同理：当函数在此点可微时，那么函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.}$$



例2 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在此处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,

$$F'_x\big|_P=4x\big|_P=4,\ F'_y\big|_P=6y\big|_P=6,\ F'_z\big|_P=2z\big|_P=2,$$

故 $\vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(4,6,2)$,

$|\vec{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14}$, 方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P(1,1,1)}=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P(1,1,1)}=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P(1,1,1)}=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$$

三、梯度

定义2 设$z=f(x,y)$在区域D内具有连续偏导数在点$P_0(x_0,y_0)$，规定梯度为

$$gradf(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$可微分，$\vec{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$是与方向 l 同向的单位向量，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l$$

$$=\left|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\right|\cos(\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\,\hat{,}\,\vec{e}_l)$$

注：当 $(\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\,\hat{,}\,\vec{e}_l)=0$ 时，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 有最大值.

结论　函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

例1. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$，求函数在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数;

等值线

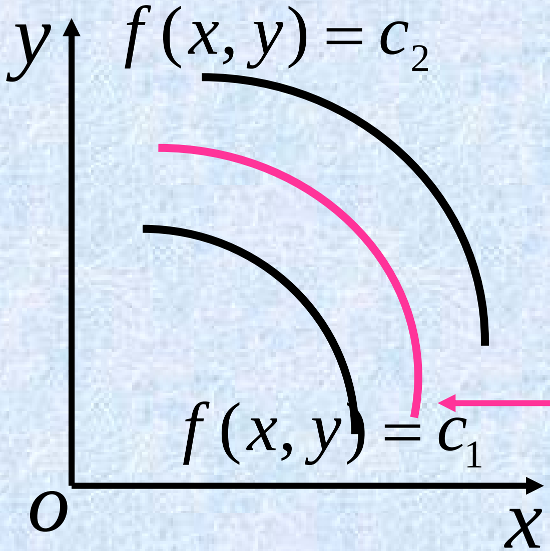
在几何上$z = f(x,y)$表示一个曲面，该曲面被平面

$z = c$ 所截, 得曲线$L\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$,

它在xoy面上投影曲线 L^* 的方程:

$\boxed{f(x,y) = c}$ 称为等值线.

几何上，称为等高线.

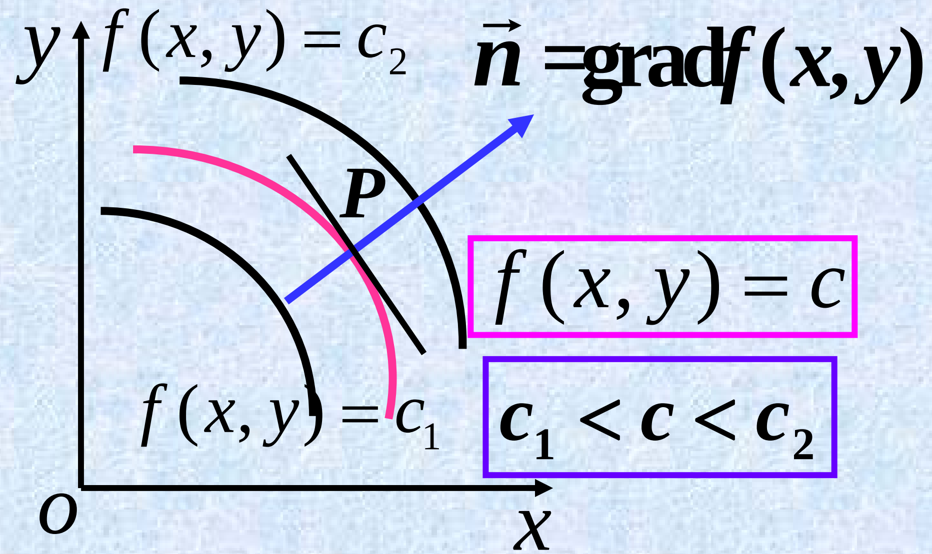


$\boxed{f(x,y) = c}$ 等高线

等值线 $f(x,y)=c$ 上

任一点处的一个法向量为

$$\vec{n}=(f_x, f_y)=\mathrm{grad}f$$



表明：梯度方向与等值线的一个法线方向相同，

它的指向为从数值较低的等值线指向较高的等值线.

梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数$u = f(x, y, z)$在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x, y, z) \in G$，都可定义一个向量(梯度)

$$gradf(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

思考与练习

问函数在某点处沿什么方向的方向导数最大?

答：沿梯度方向

作 业

1， 8，10.

第八节　多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

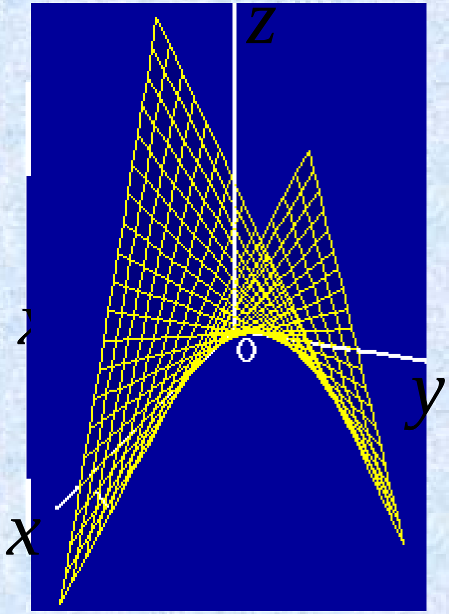
则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

例如：

$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.



问题

多元函数的极值和偏导数之间有无关系？

回顾:

一元函数中极值和导数的关系？

可导函数的极值点必为驻点.

定理1 (必要条件) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = 0\,,\quad f_y(x_0, y_0) = 0}$$

驻点

证: 因 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值 , 故

$$z = f(x, y_0) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z = f(x_0, y) \text{ 在 } y = y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

驻点 : 使偏导数都为 0 的点.

驻点：使偏导数都为 0 的点.

驻点是否一定是极值点？

例如，$z = xy$ 有驻点 $(0, 0)$，但在该点不取极值.

驻点不一定是极值点.

问题：如何判断函数的驻点是否为极值点？

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \ f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

注意：定理2只是判断驻点是否为极值点。

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

$$\text{解方程组}\quad \begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=\ -3y^2+6y=0 \end{cases}$$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

B C

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

A

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$$

$$\therefore\ f(1,0)=-5 \text{ 为极小值;}$$

在点(1,2) 处 $A=12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)\text{ 不是极值;}$$

在点(−3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0,\ \therefore f(-3,0)\text{不是极值;}$$

在点(−3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值.}$$

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

二、最值应用问题

依据

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{函数 } f \text{ 在闭域上连续}\\ \Downarrow \\ \text{函数 } f \text{ 在闭域上可达到最值}\end{array}}$$

最值可疑点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$

特别，当区域内部最值存在，且只有一个极值点 P 时，

$f(P)$ 为极小(大)值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大)值

例3. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水
问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}$ m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可
断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$
高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

三、条件极值

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,} \\ \qquad\qquad\quad \text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

转化

从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2　拉格朗日乘数法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述, 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$, 则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题, 故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记
$$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数***F*** 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

设 $F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z)$

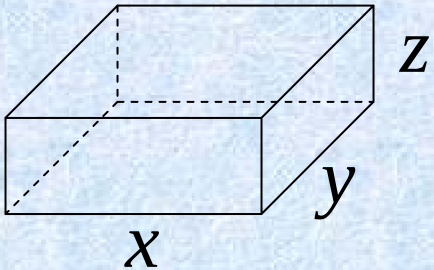
解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_1} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例5. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x, y, z 分别表示长、宽、高, 则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

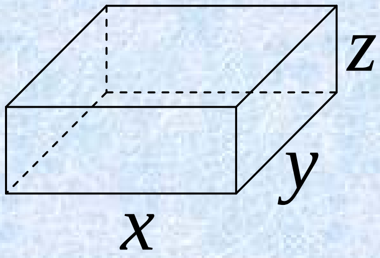
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点

$$x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0},\ \lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$$



由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$,

长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.

作业

2, 5