第六章　　定积分在几何中的应用

一、定积分的元素法

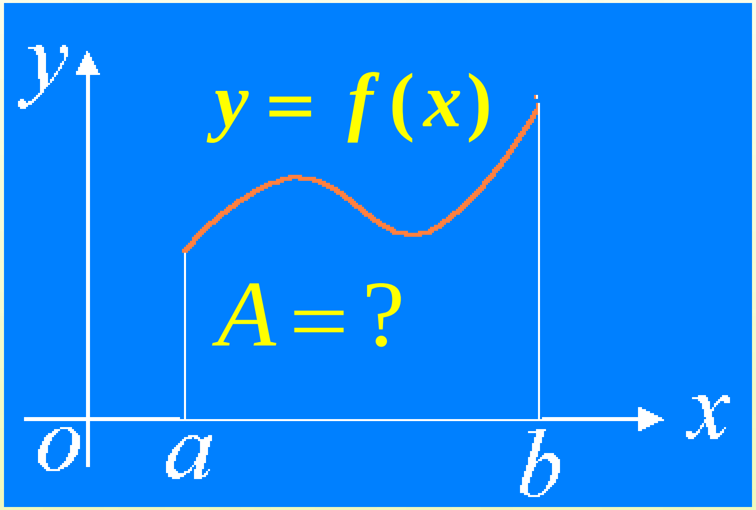
二、 平面图形的面积

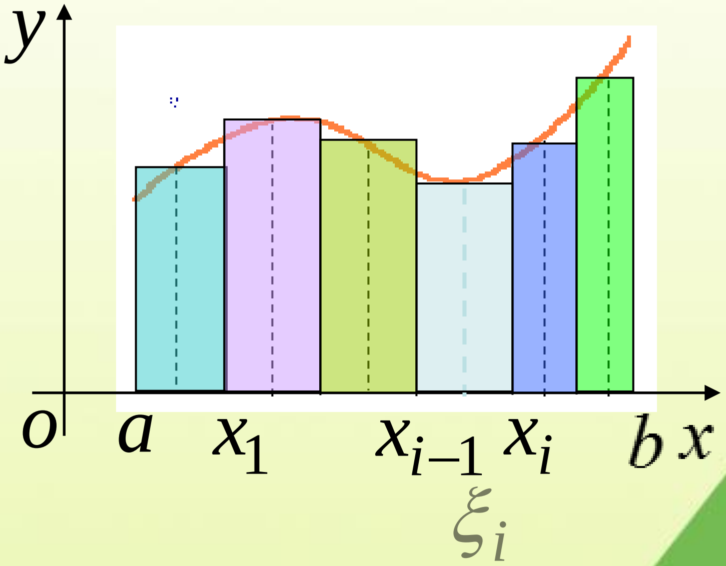
三、 立体图形的体积

四、 平面曲线的弧长

一、定积分的元素法

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(\geq 0)$、x轴与两条直线 $x = a$、$x = b$所围成.





（1）**分割：** $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$

（2）近似代替 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

（3）求和 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限 $A=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\int_a^b f(x)dx$

可以用定积分解决的问题

一般地， 若某实际问题中的所求量 U 符合以下条件：

（1） U 是一个与变量 x 的变化区间$[a, b]$有关的量;

（2） U 关于区间具有可加性;

（3） 部分量 ΔU_i 的近似值形如 $f(x_i)\Delta x_i$.

则可考虑用定积分来表达这个量 U

具体过程

（1） 根据实际问题，选取一个积分变量 x， 并确定其变化区间 $[a,b]$；

（2） 设想把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，选取典型小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，求出此区间

上部分量 ΔU 的近似值 $\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}x$，得到所求量 U 的元素 $\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$

（3） 以所求量 U 的元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作定积分，

得到 U 的积分表达式 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，计算定积分得到量 U

—— 元素法

注记 1：利用微元法的解题步骤

（1） 确定所求量 U 和自变量 x 及其变化区间 $[a,b]$；

（2） 根据自变量 x 和增量 dx，在区间 $[x,x+dx]$ 上找出 $f(x)$，建立 U 的增量近似表达式

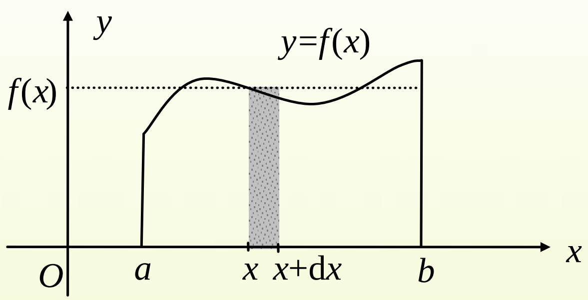
$$\Delta U(x) \approx dU = f(x)dx$$

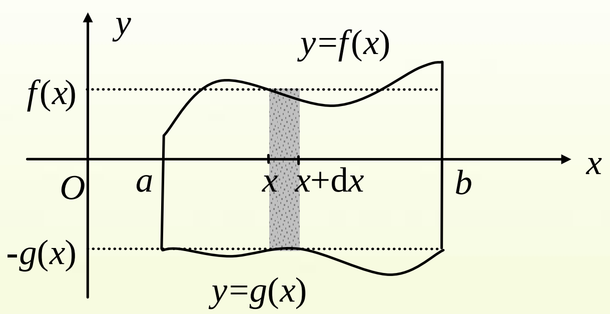
（3） 计算定积分 $U[a,b] = \int_a^b f(x)dx$.

二、平面图形的面积

1. 平面直角坐标：

一般地，平面图形的面积元素都用小矩形的面积表示





（1）求 $x=a$， $x=b$， $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 所围图形的面积

以 x 为积分变量，积分区间 $[a,b]$. 面积元素 $dA=[f(x)-g(x)]dx$，则

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

二、平面图形的面积

1．平面直角坐标：

（2）同理可得由 $y=\alpha, y=\beta$（$\alpha<\beta$），$x=\varphi_1(y)$ 和 $x=\varphi_2(y)$ 所围图形的面积为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right|dy$$

注记 2：求平面图形的面积一般步骤为：

（1）作草图，确定积分变量与积分区间；

（2）求出面积微元素；

（3）计算定积分，求出面积.

例 1　　求 $y=x^2$， $x=1, y=0$ 围成的平面图形的面积.

解：解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ x=1 \end{cases}$ 得曲线 $y=x^2$ 与 $x=1$ 的交点： $A(1,1)$

显然曲线 $y=x^2$ 与 $y=0$ 的交点为 $O(0,0)$，

取 y 为积分变量，则 $0\le y\le 1$，且在 $[y, y+\Delta y]$ 上的面积元素

$$dA=\left[1-\sqrt{y}\right]dy$$

于是所求的图形的面积

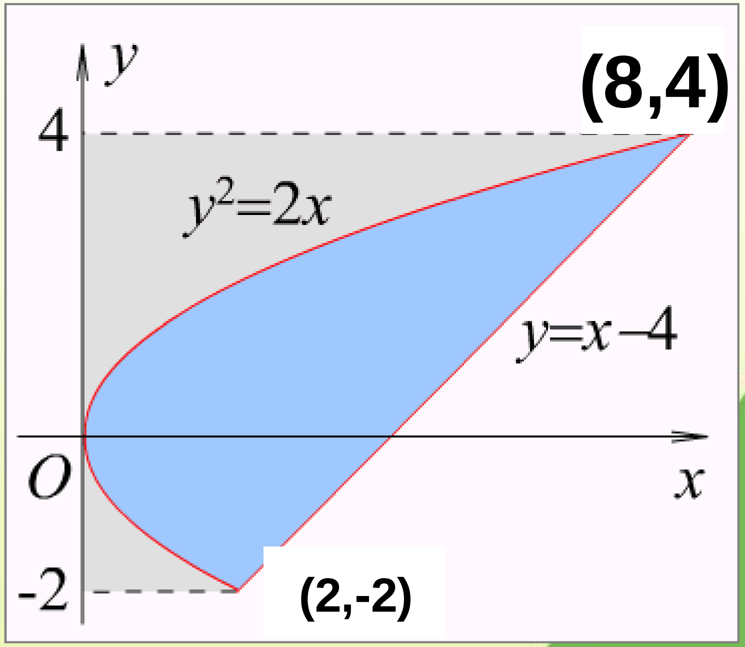
$$A=\int_0^1\left(1-\sqrt{y}\right)dy=\left[y-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}y^{1+\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

例2 计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解

$$S=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{1}{2}y^2)dy$$

$$=[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3]_{-2}^{4}=18.$$



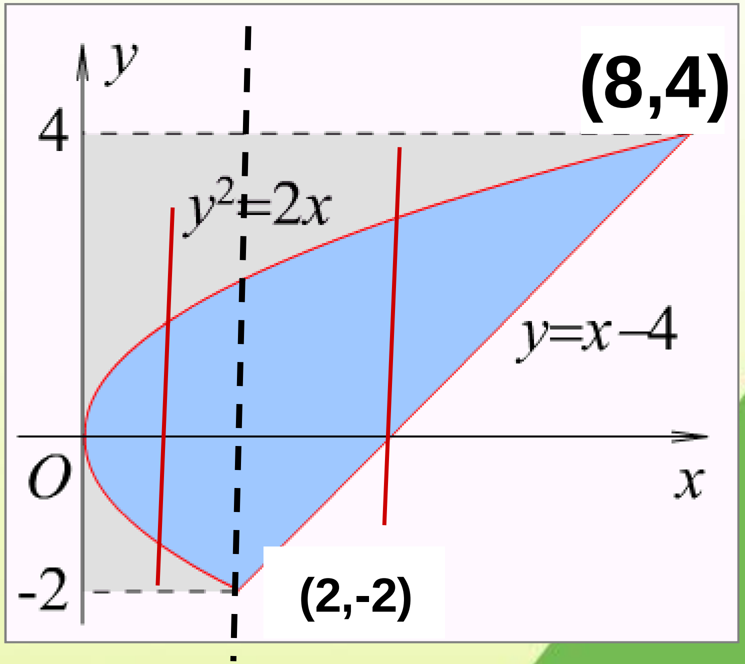
例2 计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

思考:若按上下曲线来计算面积会怎么样？

提示：

$$A=\int_0^2(\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x}))dx$$

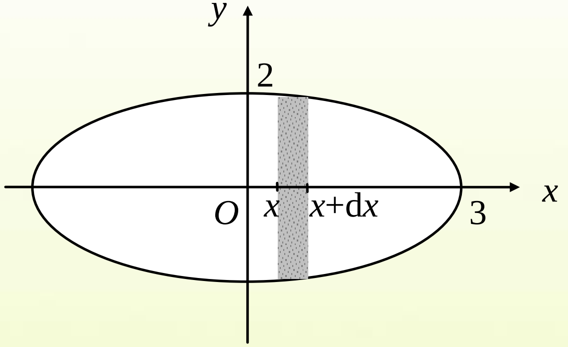
$$+\int_2^8(\sqrt{2x}-(x-4))dx$$



例 3 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积.

解：由对称性，所求面积为它在第一象限部分面积的 4 倍.

取 x 为积分变量，由公式得所求面积 $A=4\int_0^a ydx$



第一象限椭圆的参数方程为

令 $x=a\cos t, y=b\sin t$， $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 则

$$A=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$$

注记 3：设曲线 L 的参数方程是 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$(\alpha \le t \le \beta)$，若

（1） $x(t), y(t)$ 具有连续的一阶导数

（2） $y(t) \ge 0, x(t)$ 严格单调，

（3） $x(\alpha) = a, x(\beta) = b.$

则由曲线 L 及 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积是

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt$$

2. 极坐标系的情形

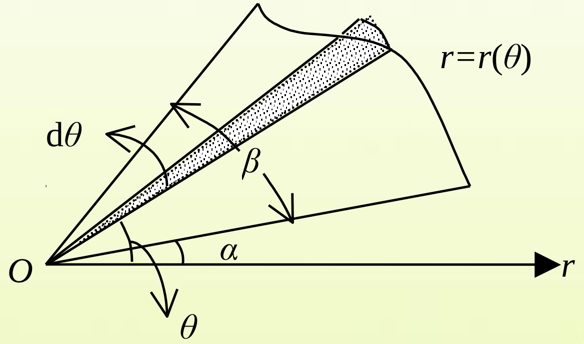
设在极坐标系下，一平面图形由曲线 $r=r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$， $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$

围成(称这样的平面图形为曲边扇形)， $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

（1）取 θ 为积分变量，则 $\theta\in[\alpha,\beta]$，在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$，

（2） 面积元素 $dA=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$，

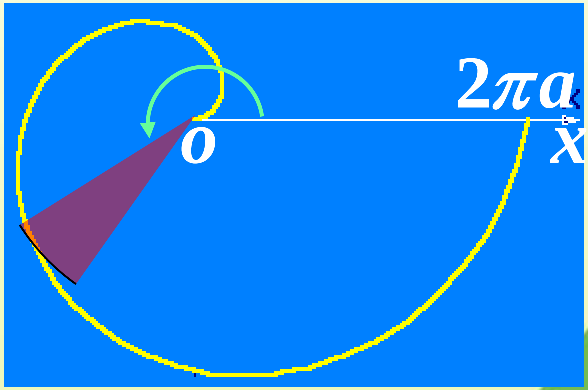
（3）所求曲边扇形的面积 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$



例 3：求阿基米德螺线 $\rho = a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 到 2π 所围图形面积 .

解：θ 从 0 到 2π 所围图形的面积 元素为 $dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2\,d\theta$.

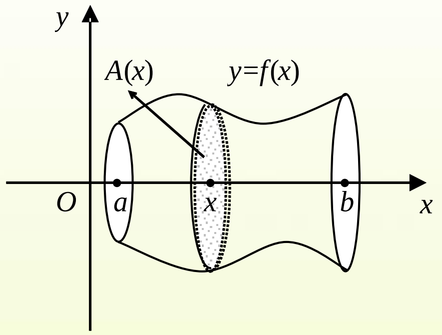
所求图形的面积 $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\times\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4a^2\pi^3}{3}$



二、体积

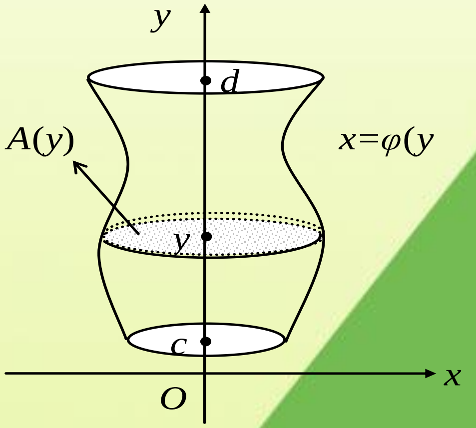
1　旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.



（1）曲边梯形 $0 \le y = f(x), a \le x \le b$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



（2）曲边梯形 $0 \le x = \varphi(x), c \le y \le d$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

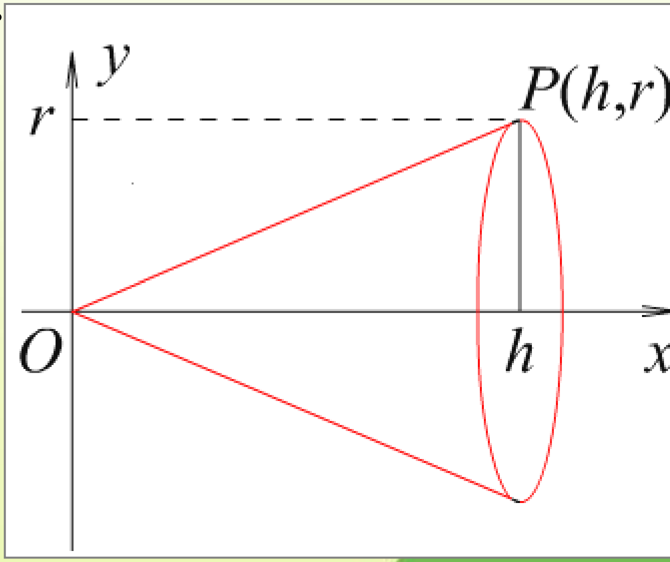
旋转体的体积： $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$.

例4 连接坐标原点O及点$P(h，r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解 直角三角形斜边的直线方程为$y=\dfrac{r}{h}x$.

$$V=\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}[\frac{1}{3}x^3]_0^h=\frac{1}{3}\pi hr^2 .$$



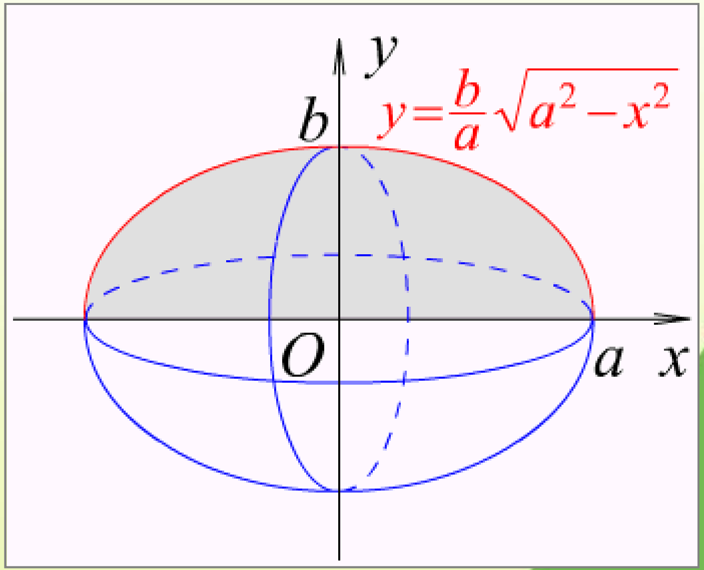
例5计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所成的图形绕$x$轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解 旋转椭球体可以看作是由半个椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴围成的图形绕x轴旋转而成的立体.

旋转椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2 .$$



二、体积

2. 平行截面面积已知的立体的体积

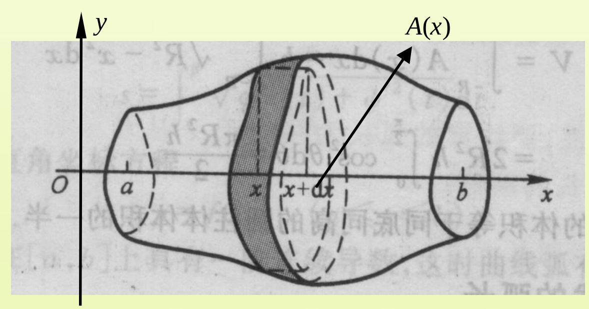
设一物体位于平面 $x=a$（过 x 轴上的点 a，且垂直于 x 轴的平面）与 $x=b$ 之间，

任意垂直于 x 轴的平面截该物体，所得截面面积为 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

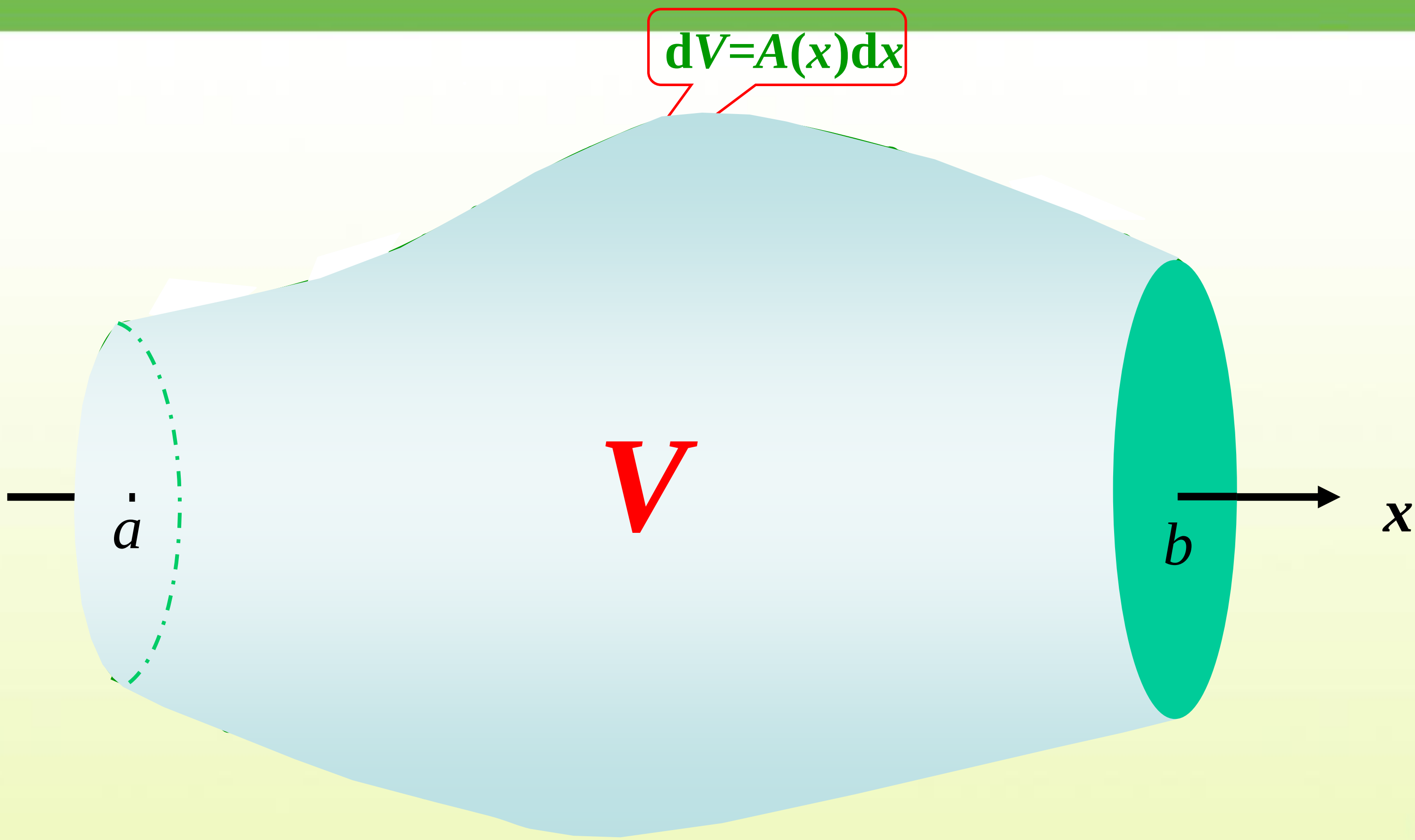
任意一个区间 $[x, x+dx]$ 的薄片的体积近似于底面积为 $A(x)$ 高为 dx 的扁柱面的体积

从而立体的体积元素 $dV = A(x)dx$，所以立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)dx\,.$$



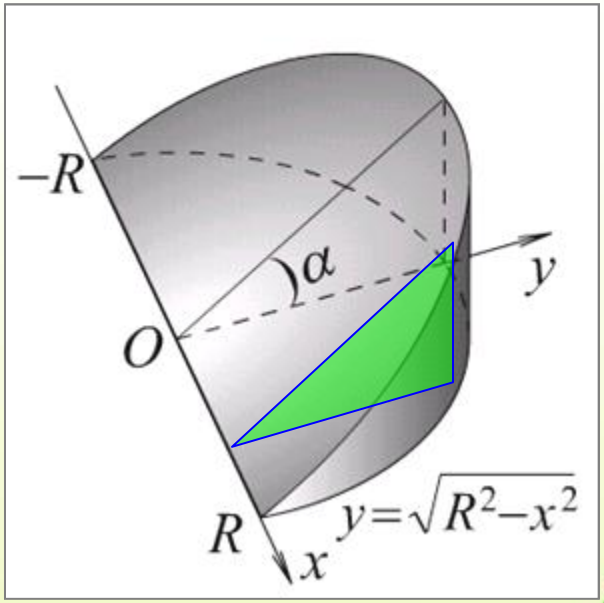
已知平行截面面积为 $A(x)$ 的立体



$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

例7 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α. 计算这平面截圆柱所得立体的体积.

解 建立坐标系如图，则底圆的方程为$x^2+y^2=R^2$.



立体中过点x且垂直于x轴的截面为直角三角形，其面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha .$$

所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan\alpha[R^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha .$$

三、平面曲线的弧长

设曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$$

给出,其中$f(x)$在区间$[a,b]$上具有一阶连续导数.

在曲率一节中,我们已经知道弧微分的表达式为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx\ .$$

这也就是弧长元素.

因此,曲线弧的长度为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx\ .$$

曲线$y=f(x)(a\le x\le b)$的弧长：$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

例8 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.

解 $y'=x^{\frac{1}{2}}$，从而弧长元素

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x}\,dx .$$

因此, 所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=\frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right] .$$

四．平面曲线的弧长

2. 曲线方程为参数形式时曲线的弧长

设曲线的参数方程为 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ （$\alpha \le t \le \beta$ ）

（1） $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续可导，

（2） $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$.

则 曲线的弧长为 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

四. 平面曲线的弧长

3. 极坐标系中曲线的弧长

设曲线的极坐标形式 $r = r(\theta)$，$\theta \in [\alpha, \beta]$，$r(\theta)$ 连续可导 ，则曲线的弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta .$$

P_{287} 25.计算星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$的全长.

解：$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cdot\cos t]^2}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}dt$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt$$

$$=6a.$$