微分方程（数一）考研真题

一、选择题（将最佳答案的序号填写在括号内）

1. （08 年，4 分）在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是（　　）

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

二、填空题

1. （96 年，3 分）微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为 $y=$ ________

2. （99 年，3 分） $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ________

3. (00 年，3 分) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为________

4.（01 年，3 分）设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为________

5. （02 年，3 分）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是________________

6. （05 年，4 分）　微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

7.（06 年，3 分）微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________

8.（08 年，4 分）微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________

9.（09 年，4 分）若二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(c_1+c_2x)e^x$　则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$ $y'(0)=0$ 的解为 $y=$____.

10.（11 年，4 分）微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________

三、计算

1．（94 年，9 分）设 $y\big|_{x=0}=1,$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0,\ f'(0)=1$，且 $[xy(x+y)-f(x)y]dy+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。

2. （98 年，6 分）从船上向海中投放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系。设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用。设仪器的质量为 m，体积 B 为 ，海水比重为 ρ，仪器所受阻力于下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$.试建立 与　满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$

3.（02 年，7 分）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；利用前面结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。

4.（03 年，12 分）设函数 y=y(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 y=y(x)的反函数.(1)　试将 x=x(y)所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 y=y(x)满足的微分方程；(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

5. （04 年，11 分）设有方程 $x''+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在惟一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

6.（06 年，10 分）设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ)若 $f(1)=0, f'(1)=1$,求函数$f(u)$的表达式.

7. （10 年，10 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^{x}$ 的通解.