

《高等数学》第一章——函数与极限

练习题 (A)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

- (1) $U(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = \{x | a - \delta < x < a\} \cup \{x | a < x < a + \delta\}$ ()
- (2) 关系式 $x^2 - y^2 = 1$ 表示 y 是 x 的函数 ()
- (3) 关系式 $y = \max\{x, 1\} + \min\{x, -1\}$ 表示 y 是 x 的函数 ()
- (4) 关系式 $y = \arccos u$, $u = 2 + x^2$ 表示 y 是 x 的函数 ()
- (5) 若 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, 则 $f^2(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ ()
- (6) 若 $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$, 则 $f(x) = g(x)$. ()
- (7) $y = \sin^2 x$ 是周期为 π 的函数. ()
- (8) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$. ()
- (9) $y = 0$ 是曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 的水平渐近线. ()
- (10) $y = f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$. ()
- (11) 收敛数列的极限不唯一. ()
- (12) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$. (其中 $\lim \alpha = 0$). ()
- (13) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = 0$ ()
- (14) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义. 若 $f(x)$ 连续且 $f(x) \neq 0$, $g(x)$ 有间断点, 则 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点 ()

二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. 若 $f(x) = e^x$, $f(\varphi(x)) = 1 - x$, 则 $\varphi(x) =$ _____
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan n}{n^2} =$ _____
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{10^n} \right) =$ _____
4. $\lim_{x \rightarrow 0} |x| =$ _____
5. $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 + x + x^2)(1 - x + \sin^2 x)] =$ _____
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \sin \frac{1}{n^2} \right) =$ _____
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n =$ _____
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)^3}{\tan x} =$ _____
9. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| =$ _____
10. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} =$ _____
11. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$ _____
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} =$ _____
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} =$ _____

三、选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 则下列命题错误的是 ()

A: 若 $f(x)$ 在 X 上有界, 则 $f(x)$ 在 X 上既有上界也有下界

B: 若 $f(x)$ 在 X 上有界, 则 $|f(x)|$ 在 X 上也有界

C: 若 $f(x)$ 在 X 上有界, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 X 上必无界

D: 若 $|f(x)|$ 在 X 上无界, 则 $f(x)$ 在 X 上也无界

(2) 下列结论错误的是 ()

A: $y = \sin x$ 在定义域上有界 B: $y = \tan x$ 在定义域上有界

C: $y = \arctan x$ 在定义域上有界 D: $y = \arccos x$ 在定义域上有界

(3) 下列结论正确的是 ()

A: $y = \arcsin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ B: $y = \arctan x$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$

C: $y = \cos x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ D: $y = \operatorname{arc} \cot x$ 的值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则下列结论错误的是 ()

A: $\{x_n\}$ 必有界 B: 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$

C: 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ D: 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1000} = a$

(5) 下列结论正确的是 ()

A: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定存在

B: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定不存在

C: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

D: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限存在且相等

E: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限存在但不相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ 一定存在

(6) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, 则下列结论错误的是 ()

A: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x))$ 不存在 B: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$ 不一定存在

C: $\lim_{x \rightarrow \infty} [2f(x)]$ 一定存在 D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

(7) 下列结论正确的是 ()

A: 绝对值很小的数一定是无穷小 B: 至少有两个常数是无穷小

C: 常数不可能是无穷小 D: 在自变量的某一变化过程中, 趋向 0 的函数是无穷小

(8) 下列结论正确的是 ()

A: 有界函数与无穷大的积不一定为无穷大 B: 无限个无穷小的和仍为无穷小

C: 两个无穷大的和 (积及商) 仍为无穷大 D: 无界函数一定是无穷大

(9) 下列等式不成立的是 ()

A: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n n} = 0$ B: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

C: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ D: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$

(10) 下列结论错误的是 ()

A: 单调有界数列必收敛 B: 单增有上界的数列必收敛

C: 单调数列必收敛 D: 单减有下界的数列必收敛

(11) 下列结论正确的是 ()

A: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1$ 是比 x^2 高阶的无穷小

B: 当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1$ 与 x^2-1 是同阶的无穷小

C: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{n^2}$ 是比 $\frac{1}{n}$ 低阶的无穷小

D: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $\sin ax \sim \tan x$, 则 $a = 2$

(12) 下列结论不正确的是 ()

A: $x = 0$ 是 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点

B: $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的可去间断点

C: $f(x) = \cot x$ 只有一个间断点

D: $x = 0$ 是 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 的第二类间断点

(13) 下列结论不正确的是 ()

A: 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+10} = a$

B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = 1$

C: 若 $0 < x_n \leq \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = 1$

(14) 下列数列收敛的是 ()

A: $1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$

B: $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

C: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

D: $\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^n, \dots$

(15) 下列数列发散的是 ()

A: $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

B: $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

C: $x_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

D: $x_n = n(-1)^n$

(16) 下列变量在给定变化过程中, 不是无穷大量的是 ()

A: $\lg x, (x \rightarrow 0^+)$

B: $\lg x, (x \rightarrow +\infty)$

C: $x^2 + 1, (x \rightarrow 0)$

D: $e^{-\frac{1}{x}}, (x \rightarrow 0^-)$

(17) 下列结论错误的是 ()

A: $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty), \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

B: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = 0$

C: $\forall x_0 \in (-1, 1), \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0$

D: $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x_0$

四、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin(\sqrt{x^2 + x} - x)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \right)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{e^{x^3} - 1}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$.

五、证明题

1. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续.

2. 证明 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在定义域内连续的充要条件是 $a = 1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.

4. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right) = 0$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, 求证: 存在 $\xi \in [0, 2]$, 使 $f(\xi) = 1$.

6. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 在 1 与 2 之间至少存在一个实根.

《高等数学》第一章——函数与极限

练习题 (B)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

(1) $|x^2 - 3x - 2| < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (3, 4)$ ()

(2) 以1为中心, 2为半径的去心邻域为 $\overset{0}{U}(1, 2) = \{x | -1 < x < 1\} \cup \{x | 1 < x < 3\}$ ()

(3) 关系式 $y = \arcsin(x^2 + 3)$ 表示 y 是 x 的函数 ()

(4) 关系式 $y = \max\{x, 1\} + \min\{x, 5\}$ 表示 y 是 x 的函数 ()

(5) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 则函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[1, 2]$ ()

(6) 若 $f(x-1) = x^2(x-1)$, 则 $f(x) = x(x-1)^2$ ()

(7) 函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 是偶函数 ()

(8) 函数 $f(x) = \cos 4x$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \arccos 4x$ ()

(9) 若 $f(x) = \sqrt{(\operatorname{sgn} x)^2}$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$, 则 $f(x) = g(x)$. ()

(10) $y = \sin 2x + \tan \frac{x}{2}$ 是周期为 π 的函数. ()

(11) 函数 $y = \sqrt{1-u^2}$, $u = \lg x$ 能构成复合函数 $y = \sqrt{1-\lg^2 x}$ 的充分必要条件是 $x \in [1, 10]$ ()

(12) 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ 的水平渐近线是 $y = 1$ ()

(13) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则必有 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ ()

(14) $f(x) = \begin{cases} x+a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续的充要条件是 $a=0$ ()

(15) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续, 且 $f(x) \neq 0$, 若 $g(x)$ 有间断

点, 则 $\frac{2g^2(x)}{f^2(x)}$ 必有间断点 ()

(16) $x=1$ 是函数 $y = (\operatorname{sgn}(x-1))^2 + 1$ 的可去间断点 ()

(17) $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $y = \tan^2 2x - 1$ 的无穷间断点 ()

(18) $\lim f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 + \alpha$. (其中 $\lim \alpha = 0$) ()

(19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{20}(n+100)^{80}}{(n+1)^{100}} = 1$ ()

(20) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} = 0$ ()

二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. 若 $f(x) = e^x$, $f(\varphi(x)) = 1 - x$, 则 $\varphi(x) =$ _____

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \arctan(n-1)(\sin n + 1)}{n^2 - 100} =$ _____

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{7}{100^n} \right) =$ _____

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (|x-1| \operatorname{sgn}(x-1)) =$ _____

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} (3 + \cos^2 x) \right] =$ _____

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \sin \frac{2}{n^4} \right) =$ _____

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \left(1 - \frac{4}{n} \right)^{2n} =$ _____

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 4x)^{100}}{(\tan 2x)^{50}} =$ _____

9. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} [|x_{2n}| + |x_{2n-1}|] =$ _____

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x - 2} =$ _____

11. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$ _____

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{200} - 1}{x^{1000} + 1} =$ _____

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x =$ _____

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{\cos x}} =$ _____

三、选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

(1) 下列结论错误的是 ()

A: 由于函数 $f(x) = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 因此 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$

必存在且 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

B: 在同一平面坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称

C: 由于函数 $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增且连续, 因此 $f(x)$ 的反函数

$f^{-1}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是单调递增且连续.

D: 函数 $f(x) = \arccot x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(2) 下列数列收敛的是 ()

A: $x_n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

B: $x_n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

C: $x_n : 0, \ln 2, \ln 3, \ln 4, \ln 5, \dots$

D: $x_n : 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \dots$

(3) 下列数列发散的是 ()

A: $\left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n} \right\}$ B: $\left\{ \frac{3}{10^n} + 1 \right\}$ C: $\{(-2)^n\}$ D: $\left\{ \frac{1}{n \ln(n+1)} \right\}$

(4) 下列结论错误的是 ()

A: 单调有界数列必收敛

B: 发散的数列必无界

C: 数列收敛的充要条件是任意子列都收敛于同一个数

D: 收敛的数列必有界

(5) 若 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都不存在, 则 ()

A: $\lim [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim [f(x)g(x)]$ 都不存在

B: $\lim [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim [f(x)g(x)]$ 一定都存在

C: $\lim [f(x) - g(x)]$ 与 $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ 都不存在.

D: $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 、 $\lim[f(x)g(x)]$ 与 $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ 可能存在,也可能不存在

(6) 下列结论正确的是 ()

A: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 则必有 $f(x) > g(x)$

B: 若 $f(x) > g(x)$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

C: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 必有界

D: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是对任意数列 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow x_0$, 有

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = \lim_{y_n \rightarrow x_0} f(y_n) = A$$

(7) 下列结论正确的是 ()

A: 若数列 x_n 无界, 则数列 x_n 一定发散

B: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 一定存在

C: 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |a|$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$

D: 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 一定不存在

(8) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 下列变量中不是无穷小量的是 ()

A: $\frac{x-1}{x^3+x^2+1}$ B: $\sqrt{x^2+1}$

C: $\frac{(1-x^2)\sin\frac{1}{1-x^2}}{x}$ D: $\frac{1}{1-x^2}\sin\frac{1-x^2}{x}$

(9) 下列变量在给定的变化过程中为无穷大量的是 ()

A: $x^4 \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$ B: $\frac{1}{x} \sin^2 x (x \rightarrow 0)$

C: $x \cos x (x \rightarrow \infty)$ D: $\frac{1}{x} \cos x (x \rightarrow 0)$

(10) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中与 $\tan^2 x$ 为等价无穷小量的是 ()

A: \sqrt{x} B: x C: x^2 D: x^3

(11) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 是比 $\arcsin^n x$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 ()

A: 1 或 2 B: 4 C: 5 D: 3.

(12) 设 $\alpha(x) = e^{x^m} - 1, \beta(x) = \ln(x^n + 1), m, n \in N^+$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列结论正确的是 ()

A: 当 $m > n$ 时, $\alpha(x)$ 必是 $\beta(x)$ 等价的无穷小

B: 当 $m = n$ 时, $\alpha(x)$ 必是 $\beta(x)$ 高阶的无穷小

C: 当 $m < n$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小

D: 当 $m < n$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小

(13) 设若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则下列结论可能不正确的是 ()

A: $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$ B: $\alpha \pm \beta \sim \alpha' \pm \beta'$

C: $\alpha/\beta \sim \alpha'/\beta'$ D: $C\alpha \sim C\alpha' (C \neq 0)$

(14) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 有 ()

A: 跳跃间断点 B: 可去间断点

C: 震荡间断点. D: 无穷间断点

(15) 函数 $y = \frac{1}{(x-3)\ln|x|}$ 的间断点有 ()

A: 1 个; B: 2 个 C: 3 个 D: 4 个

(16) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $\frac{1}{ax^2+bx+c} \sim \frac{1}{x-1}$, 则 a, b, c 的值一定为 ()

A: $a=0, b=1, c=-1$ B: $a=0, b=1, c$ 为任意常数

C: $a=0, b, c$ 为任意常数 D: a, b, c 为任意常数

(17) 下列极限中结果等于 e 的是 ()

《高等数学》第一章——函数与极限

自测题 (A)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×. 每小题 2 分, 共 24 分)

1. 数列 $\{\frac{1}{3^n} + 1\}$ 是收敛数列, 数列 $\{(-1)^n\}$ 是发散数列. ()
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$, 则数列 $\{x_n\}$ 发散. ()
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, (其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$). ()
4. 无限个无穷小量之和仍为无穷小量. ()
5. 无界量一定是无穷大量. ()
6. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. ()
7. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的. ()
8. 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则必有 $\alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'$. ()
9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1$ 是比 x 高阶的无穷小量. ()
10. $y = x + \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调递增的. ()
11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量. ()
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = 1$. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内. 每小题 2 分, 共 10 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 (f(x) \neq 0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$, 则下列结论不一定正确的是 ()

- A: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ B: $\lim_{x \rightarrow x_0} [2f^2(x) + g(x)] = 1$
- C: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ D: $f(x) > g(x)$

2. 下列结论不正确的是 ()

- A: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B: $\lim_{x \rightarrow 1} (\sin \ln x) = 1$
- C: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ D: $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 0$

3. 函数 $f(x) = e^{\cos x}$ 不是 ()

- A: 偶函数 B: 单调函数
- C: 有界函数 D: 周期函数

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则下列结论错误的是 ()

- A: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界
- B: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值
- C: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则至多有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f(\xi) = 0$
- D: 若 $f(a) < C < f(b)$, 则至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f(\xi) = C$

5. 下列结论错误的是 ()

A: $x=0$ 是 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 的第一类间断点

B: 点 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x) = \tan x$ 的无穷间断点

C: $x=1$ 是 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的可去间断点

D: $x=0$ 是 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点.

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 若 $0 < x_n < \frac{2}{n^2}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____ .

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim \tan ax$, 则 $a =$ _____ .

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x + \arccos x) =$ _____ .

4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan h}{h} =$ _____ .

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^3-1} =$ _____ .

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} =$ _____ .

四. 计算题 (每小题 4 分, 共 32 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\tan x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^n \sin \frac{1}{2^n} \right]$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

五. 证明题 (共 14 分)

1. 证明函数 $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ 在 $x=1$ 处极限不存在. (8 分)

2. 证明方程 $x^3+x-1=0$ 至少有一个根介于 0 与 1 之间. (6 分)

六. 讨论题 (8 分)

讨论 a 取何值时, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0; \\ a+x^2 & x \leq 0. \end{cases}$ 在定义域内连续.

《高等数学》第一章——函数与极限

自测题 (B)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×. 每小题 2 分, 共 24 分)

1. 数列 $\{\frac{1}{2^n} + (-1)^n\}$ 是发散数列. ()
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛. ()
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \alpha$, (其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$). ()
4. 无限个无穷小量之积仍为无穷小量. ()
5. 由于 $y = x \cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为无界量, 所以该函数在 $(0, +\infty)$ 内一定是无穷大量. ()
6. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x) + 1} = 0$. ()
7. 函数 $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ 图形的水平渐近线为 $x = 1$. ()
8. 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则必有 $2\alpha + 5\beta \sim 2\alpha' + 5\beta'$. ()
9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{2\sin x} - 1$ 是比 x 高阶的无穷小量. ()
10. $y = 3 \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递增的. ()
11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin^3 x$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量. ()
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = 1$. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内. 每小题 2 分, 共 10 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$, 则下列结论不一定正确的是 ()

A: $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = \infty \quad (c \neq 0)$ B: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$

C: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ D: $f(x) > g(x)$
2. 下列结论正确的是 ()

A: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin x} = 1$ B: $\lim_{x \rightarrow 2} (\cos \ln(x-1)) = 1$

C: $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e$ D: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\tan x^3} = 0$
3. 函数 $f(x) = e^{\sin^2 x}$ 不是 ()

A: 偶函数 B: 有界函数

C: 单调函数 D: 周期函数
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则下列结论错误的是 ()

A: $f^2(x)$ 在 (a, b) 上必有最大值和最小值

B: $f(x) + 1$ 在 (a, b) 上有界

C: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f^2(\xi) = 0$

D: 若 $f(a) < C < f(b)$, 则至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f^2(\xi) = C^2$

5. 函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 在 $[0, \pi]$ 上 ()

- A: 有无数多个间断点
- B: $x=0$ 为函数的跳跃间断点
- C: $x = \frac{\pi}{2}$ 为函数的振荡间断点
- D: $x = \pi$ 为函数的无穷间断点.

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 若 $-\frac{2}{n^{20}+5} < x_n < 0$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-x) \sim \tan ax$, 则 $a =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (5 \arctan x + 10 \arccos^2 x) =$ _____.

4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2h}{h^2} =$ _____.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99} + 1}{n^{100} - 1} =$ _____.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} =$ _____.

四. 计算题 (每小题 4 分, 共 32 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan 4x} - 1}{\sin 2x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^3 - 1} - \frac{x}{x^4 - 1} \right)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^n \arcsin \frac{1}{2^n} \right]$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 1}{x^2 - 1}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\arcsin x^3}$.

五. 证明题 (共 14 分)

1. 证明函数 $y = \frac{|\sin x|}{x}$ 在 $x=0$ 处极限不存在. (6 分)

2. 证明方程 $x^{99} + x - 1 = 0$ 至少有一个根介于 0 与 1 之间. (4 分)

六. 讨论题 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 讨论 a 取何值时, $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arccot}^2 \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \text{在定义域内连续.} \\ e^x \ln(1+x) + a, & x < 0. \end{cases}$

2. 讨论 a, b 取何值时, 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$.