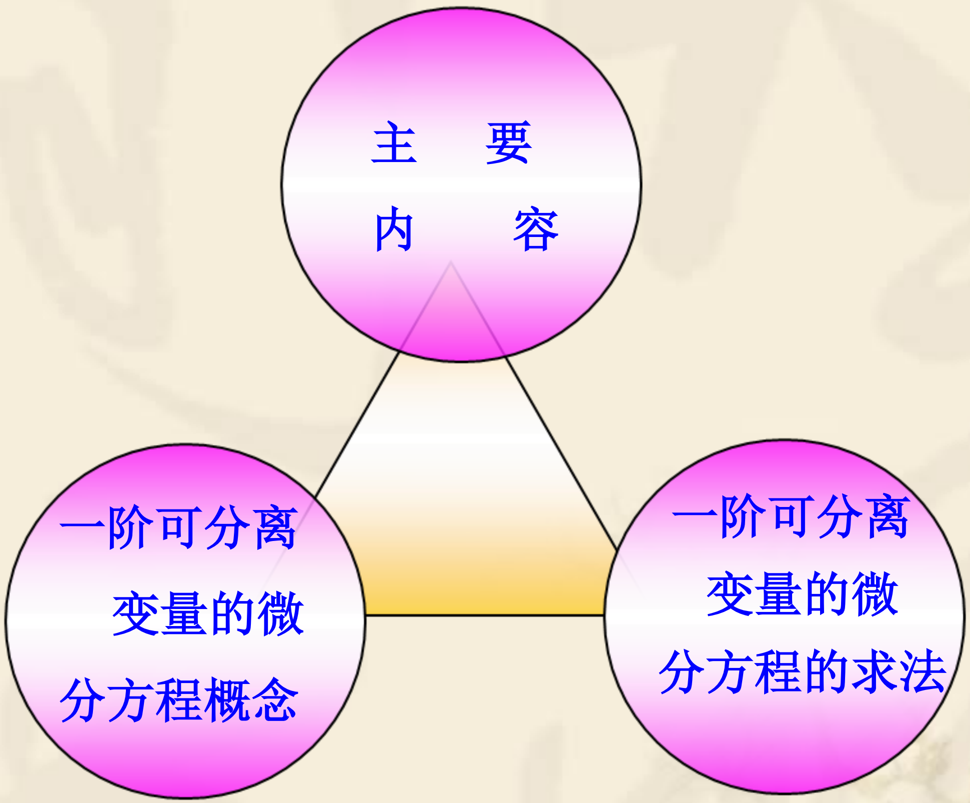
§6.2 可分离变量的微分方程



一、一阶可分离变量的微分方程的定义

观察　（1） $y' = 2xy$　　　（2） $xy' = y\ln y$

发现　（1） $\frac{1}{y}dy = 2xdx$　　　（2） $\frac{1}{y\ln y}dy = \frac{1}{x}dx$

共性具有 $g(y)dy = f(x)dx$ 形式

定义：如果一个一阶微分方程能写成 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式即

（1）一端只含 y 的函数和 dy

（2）另一端只含 x 的函数和 dx

如何求

一阶可分离变量微分方程的解？

那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

二、一阶可分离变量的微分方程求法

一阶微分方程 $g(y)dy = f(x)dx$

设 $g(y), f(x)$ 的原函数分别为 $G(y), F(x)$

两边积分

不定积分定义

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = G(y) + C_1$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C_2$$

$$G(y) = F(x) + C$$

由方程 $G(y) = F(x) + C$ 所确定的**隐函数**就是原方程的通解

二、一阶可分离变量的微分方程求法

求一阶可分离变量微分方程通解步骤

第一步　分离变量，将方程写成

$$\boxed{g(y)dy = f(x)dx}$$

第二步　两端积分: $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

得到　$G(y) = F(x) + C$

第三步　求出由 $G(y) = F(x) + C$ **所确定的隐函数** $y = \varphi(x)$ **（或** $x = \psi(y)$ **）就是通解**

例 1　求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ **的通解.**

解：　分离变量，将方程写成

$$\boxed{\frac{dy}{y} = 2xdx}$$

两端积分:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

得到　$\ln|y| = x^2 + C_1$

即　$y = \pm e^{C_1} e^{x^2}$

记　$C = \pm e^{C_1}$，则方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$

微分方程的通解
不一定
是所有的解

$\frac{dy}{dx} = 2xy$ **的通解** $y = Ce^{x^2}$

丢失了 $y = 0$

二、一阶可分离变量的微分方程求法

例 2：求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$.

通过变换可否化为

一阶可分离变量微分方程

解：设 $x+y=u$**，则** $y=u-x,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$. **于是** $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u}$ **即** $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+1}{u}$

分离变量得 $$\frac{u}{u+1}du=dx$$

两边积分得 $$u-\ln|u+1|=x+C_1$$

将 $u=x+y$ 代入可得 $$y-\ln|x+y+1|=C_1$$

即 $$x=Ce^{y}-y-1$$