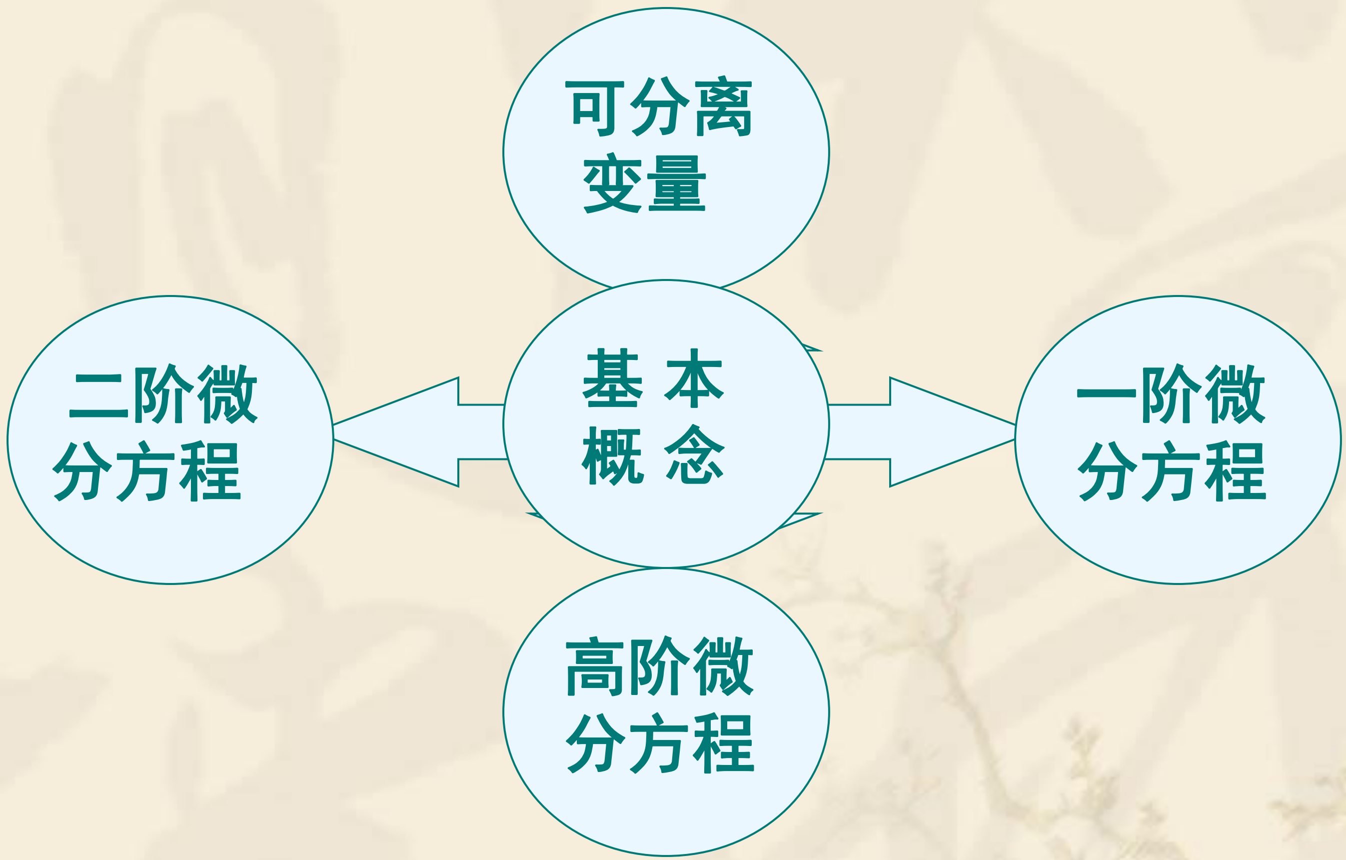
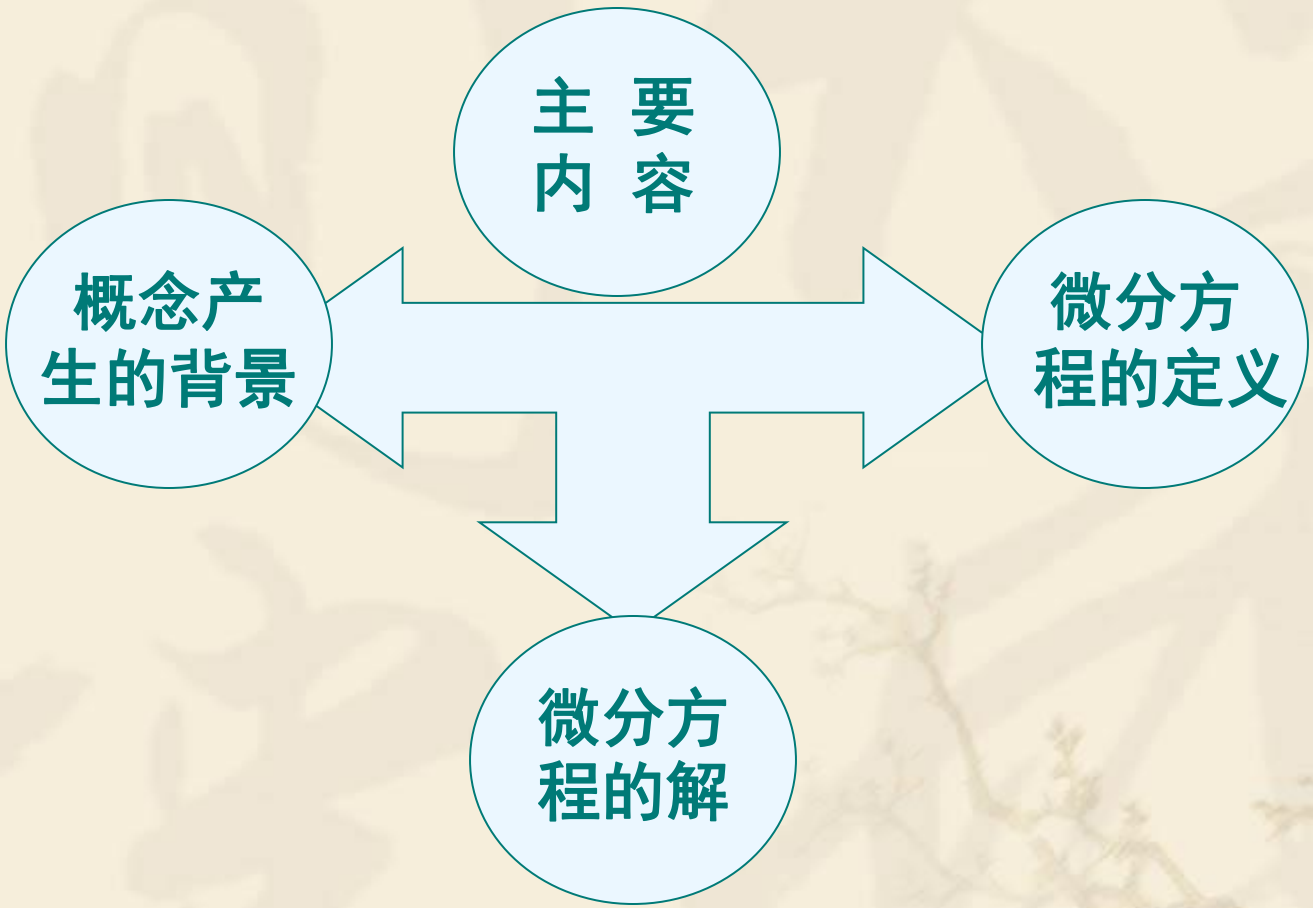
第六章　微分方程



§6.1 微分方程的基本概念



一、背　景

例 1：　一曲线通过点(1，2)，且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

分析：　第一步：建立方程　　设曲线方程为　$y=y(x)$，**则**

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=2x}$$ ⟷ 含有未知函数的 导 数（或 微 分）

第二步：解方程：两边积分得 $\boxed{y=x^2+C,}$

第三步：确定常数：　$2=1^2+C,$ 得 $C=1$

所求曲线的方程：　$\boxed{y=x^2+1}$

二、微分方程的定义

定义 1：含有未知函数导数（或微分）的方程叫微分方程

未知函数是一元的微分的方程叫做常微分方程

未知函数是多元的微分的方程叫做偏微分方程

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫微分方程的阶.

一般n阶微分方程: $$\boxed{F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0}$$

或 $$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})}$$

注记 1：**在微分方程中，自变量和未知函数可以不出现，**

但未知函数的导数或微分必须出现.

二、微分方程的定义

课堂训练 1：　　　　下列不是微分方程的是（　　）

$$A:\frac{dy}{dx}=2xy$$

$$B:(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$$

$$C:\frac{d^2x}{dt^2}=-g$$

$$D:x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

$$E:y'+y=0$$

$$F:y''+2y'+y-2x=0$$

二、微分方程的定义

课堂训练 2：下列结论不正确的是（　　）

A：　$x^2(y''')^2+x^8y''-xy^{10}-y=0$是十一阶微分方程.

B：　$(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$是一阶常微分方程

C：　$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+x=0$ 是二阶常微分方程

D：　$y''+2y'-y=1$是一个二阶微分方程.

E：　$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-x\frac{dy}{dx}+y=0$是一个二阶微分方程.

二、微分方程的定义

观察（1） $y=x^2+C$ 与 $\frac{dy}{dx}=2x$ （2） $y=-\frac{1}{2}gx^2+C_1x+C_2$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}=-g$

发现　把函数代入微分方程能使该中该方程成为恒等式

定义 2：满足微分方程的函数(把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫做该微分方程的解.

即函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上,

$$F(x,\varphi,\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

则函数 $y=\varphi(x)$ 称为微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解.

二、微分方程的定义

发现（2）$\frac{dy}{dx}=2x$ 的解 $y=x^2+C$ 中含有 1 个任意常数,

（3）$\frac{d^2y}{dx^2}=-g$ 的解 $y=-\frac{1}{2}gx^2+C_1x+C_2$ 中含有两个任意常数,

定义 3：如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，**这样的解叫做微分方程的通解.**

确定了通解中的任意常数以后,得到的微分方程的解称为特解.

用于确定通解中任意常数的条件称为初始条件

求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题.

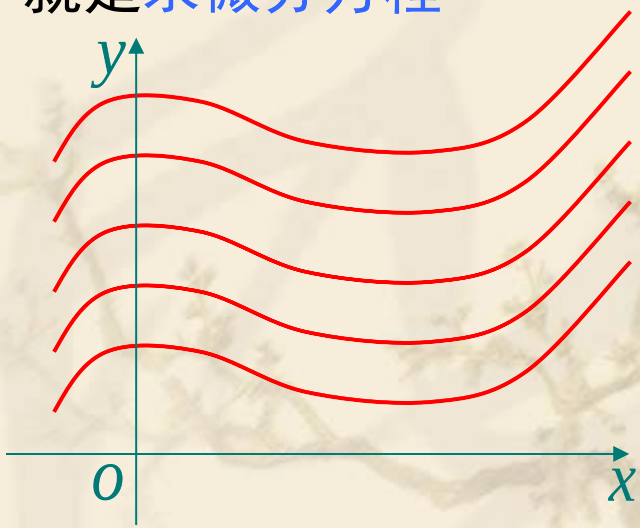
三、微分方程的解

微分方程的特解的图形是一条曲线，叫做微分方程的积分曲线.

注记 1：求一阶微分方程 $y' = f(x,y)$ 初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题记为

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

注记 2：初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 的几何意义：就是求微分方程的通过 (x_0, y_0) 的积分曲线.



注记 3：通解的图形是积分曲线族

三、微分方程的解

课堂训练 3：　　下列结论不正确的是（　　）

（1）$y=5x^2$ 是微分方程 $xy'=2y$ 的解.

（2）由 $x^2-xy+y^2=C$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 不是 $(x-2y)y'=2x-y$ 的解

（3）$y=x^2+1$ 是微分方程 $y'=2x$ 的满足条件 $y(0)=1$ 的一个特解

（4）若 C_1,C_2,C_3 是任意常数则 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$ 是 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解

（5）设 C 是任意的常数，则 $y=Ce^{-x}$ 是 $y''+y'=0$ 的解，但不是通解.

（6）与 $y=x+\int_1^x ydx$ 等价的微分方程初始问题为. $\begin{cases} y\big|_{x=1}=0, \\ \dfrac{dy}{dx}=y. \end{cases}$