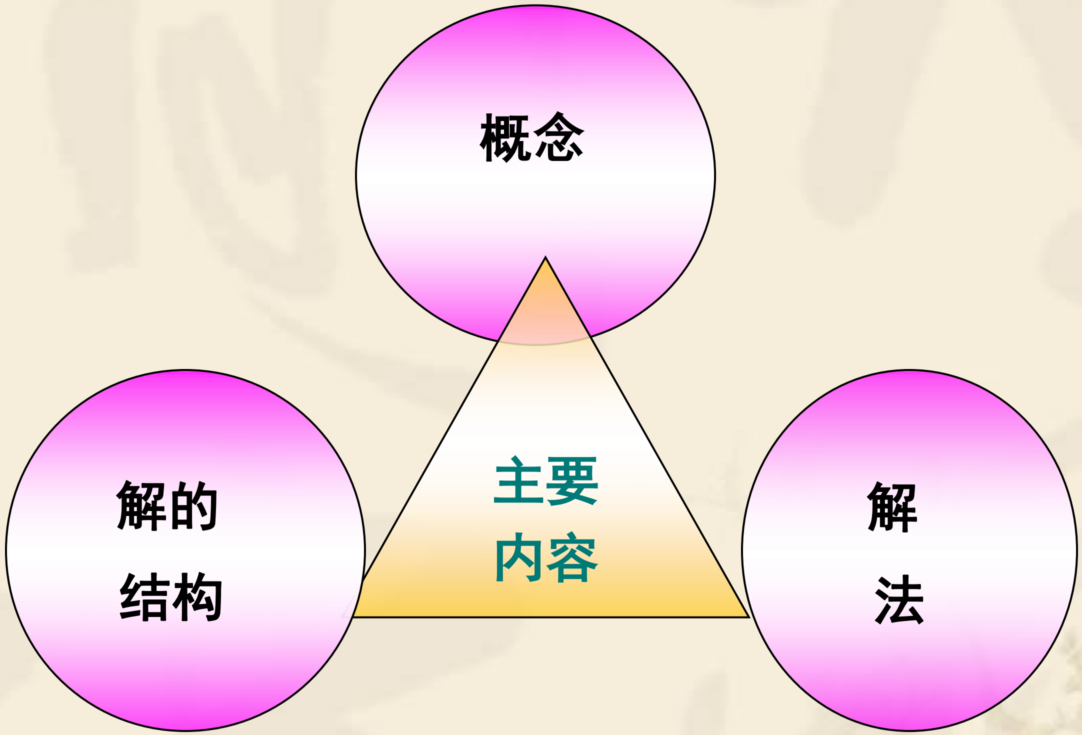
§6.6 二阶常系数非齐次线性微分方程



一、 二阶常系数非齐次线性微分方程的定义

定义 1：形如 $y''+py'+qy=f(x)$（1）

的方程叫做二阶常系数非齐次线性

微分方程.其中 p,q 为常数， $f(x)\neq 0$.

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2)$$

称为二阶常系数非齐次线性

微分方程（1）对应的齐次方程

课堂训练 1：下列是二阶非齐次线性方程的是（　　）.

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=1$　(2) $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=x$　(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$　(5) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+4y=x$　(6) $y''+2y=0$

二、二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构

（1）若 $y=y^*(x)$ 是 $y''+py'+qy=f(x)$ 的**特解**

（2） $y=\bar{y}(x)$ 是对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的**通解**

$$\left(y^*\right)''+p\left(y^*\right)'+qy^*=f(x)$$

$$\left(\bar{y}\right)''+p\left(\bar{y}\right)'+q\bar{y}=0$$

$$\left(y^*+\bar{y}\right)''+p\left(y^*+\bar{y}\right)'+q\left(y^*+\bar{y}\right)=f(x)$$

$y=y^*(x)+\bar{y}(x)$ 是 $y''+py'+q=f(x)$ 的**通解**

二、二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构

定理 1　若 $y = y^*(x)$ 是 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的**特解**

$y = \overline{y}(x)$ 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的**通解**

则 $y = y^*(x) + \overline{y}(x)$ 是 $y'' + py' + q = f(x)$ 的**通解**

注记 1：求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ **通解的思路**

第一步：　求出 $y'' + py' + qy = 0$ **通解** $y = \overline{y}(x)$

第二步：　求出 $y'' + py' + qy = f(x)$ **特解** $y = y^*(x)$

第三步：　求出 $y'' + py' + qy = f(x)$ 通解 $y = \overline{y}(x) + y^*(x)$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

定理 2： 二阶常系数非齐次齐次线性微分方程特解的形式

若 $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$	$y''+py'+q=f(x)$ 具有下列形式的特解
（1） λ 不是特征方程的根	（1） $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$
（2） λ 是特征方程的单根	（2） $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$
（3） λ 是特征方程的重根	（3） $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$
若 $f(x)=e^{\lambda x}\left(A\cos\omega x+B\sin\omega x\right)$	$y''+py'+q=f(x)$ 具有下列形式的特解
（4） $\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根	（4） $\bar{y}=e^{\lambda x}\left(a\cos\omega x+b\sin\omega x\right)$
（5） $\lambda+i\omega$ 是特征方程的根	（5） $\bar{y}=xe^{\lambda x}\left(a\cos\omega x+b\sin\omega x\right)$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

注记 2：若 $f(x)=p_m(x)\,e^{\lambda x}$ 求 $y''+py'+q=f(x)$ 特解的步骤	注记 3：若 $f(x)=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ 求 $y''+py'+q=f(x)$ 特解的步骤
1：判断 $f(x)$ 的类型找出 λ, m	1：判断 $f(x)$ 的类型找出 λ, ω
2：找出 λ 与特征方程的关系	2：找出 $\lambda+i\omega$ 与特征方程的关系
3：设出该方程的特解表达式	3：设出该方程的特解表达式
4：求出特解表达式中的系数	4：求出特解表达式中的系数

三、二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

例 求 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解：显然 $f(x)=3x+1$ **是** $p_m(x)e^{\lambda x}$ **型**

$$m=1,\lambda=0$$

$y''-2y'-3y=0$ 的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

显然 $\lambda=0$ 不是特征方程的根,

所以原方程的特解为 $y^*(x)=b_0x+b_1$

代入可得 $-2b_0-3(b_0x+b_1)=3x+1$

比较两端 x 同次幂的系数得 $\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}$

由此求得 $b_0=-1,b_1=\frac{1}{3}$ 故 $y^*(x)=-x+\frac{1}{3}$

（1） $f(x)=2e^x$ **是______型，** $m=0$，

$\lambda=$__**不是** $2y''+y'-y=0$ **的特征方程**

__________**的**________**根，**

因此 $2y''+y'+y=2e^x$ **的特解应设**

为 $y^*(x)=$____________

（2） $f(x)=3xe^{-x}$ **是______型，** $m=1$，

$\lambda=$___**是** $y''+3y'+2y=0$ **的特**

征方程__________**的**____**根，**

因此 $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$ **的特解应**

设为 $y^*(x)=$____________

三、二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

（3） $f(x)=(x+1)e^{3x}$ 是______型， $m=1$，

$\lambda=$__是 $y''-6y'+9y=0$ 的特征方程

________________的____________根，

因此 $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$ 的特解

应设为 $y^*(x)=$____________________

（4） $f(x)=e^{-x}\cos x$ 是_____________型，

$\lambda=$_____， $w=$_____， 显然 $\lambda+iw$ 不是

$y''+3y'+2y=0$ 的特征方程的特征根，

因此 $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos x$ 的特解

应设为 $y^*(x)=$___________________

（5） $f(x)=3\cos x+\sin x$ 是________型，

$\lambda=$_____， $w=$_____， 显然 $\lambda+iw$ 是

$y''+y=0$ 的特征方程的特征根，

因此 $y''+y=3\cos x+\sin x$ 的特解应

设为 $y^*(x)=$______________________