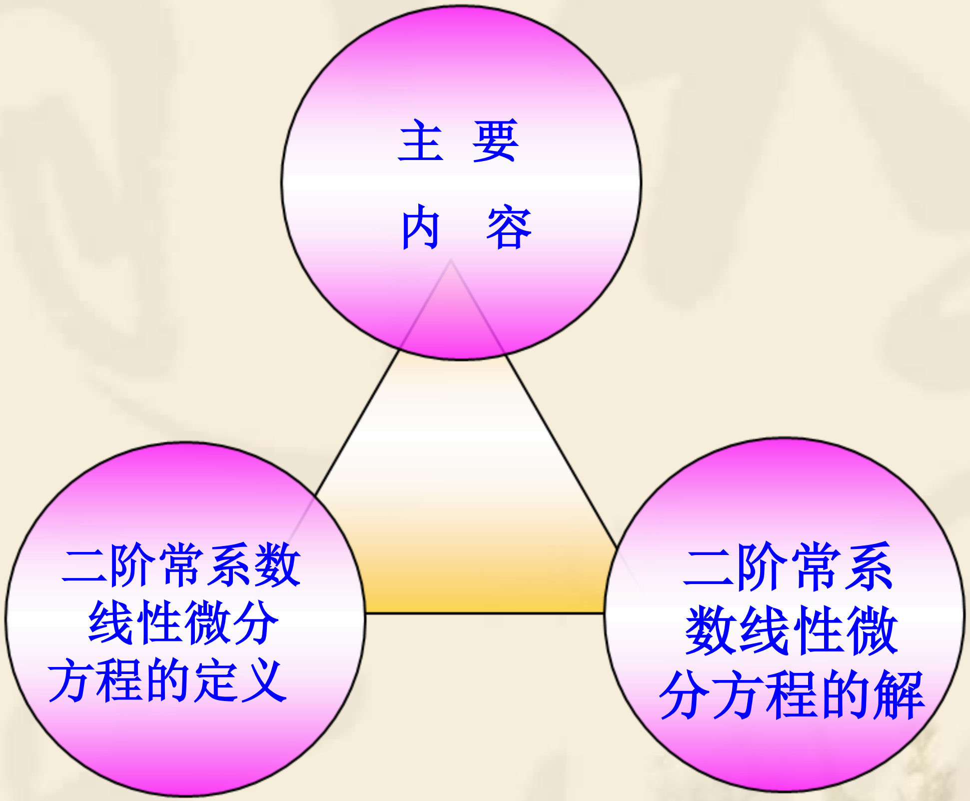
§6.5 二阶常系数线性微分方程



一、二阶常系数齐次线性微分方程的定义

定义：形如 $y'' + py' + qy = 0$ 的方程叫做二阶常系数齐次线性微分方程.

其中 p, q 为常数

未知函数的二阶导数且系数为1

未知函数的一阶导数系数为常数

未知函数的一次且系数为常数

$$y'' + py' + qy = 0$$

课堂训练 1：下列是二阶齐次线性方程的是（　　）

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 1$　　(2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 0$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$　　(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$　　(6) $y'' + 2y = 0$

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

若 $y=y_1(x), y=y_2(x),$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解，

?

$y=C_1y_1(x)+C_1y_2(x)$ 是否是 $y''+py'+qy=0$ 的解？

$$y_1''+py_1'+qy_1=0$$
$$y_2''+py_2'+qy_2=0$$

$$C_1\left(y_1''+py_1'+qy_1\right)+C_2\left(y_2''+py_2'+qy_2\right)=0$$

$$\left(C_1y_1''+C_2y_2''\right)+p\left(C_1y_1'+C_2y_2'\right)+q\left(C_1y_1+C_2y_2\right)=0$$

$$\left(C_1y_1+C_2y_2\right)''+p\left(C_1y_1+C_2y_2\right)'+q\left(C_1y_1+C_2y_2\right)=0$$

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

定理 1：如果 $y=y_1(x), y=y_2(x)$, **是** $y''+py'+qy=0$ **的解，那么**

（1） $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ **是** $y''+py'+qy=0$ **的解**

（2）若 $y_1(x)/y_2(x)\neq$**常数，则对任意的常数** C_1, C_2,

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是 $y''+py'+qy=0$ **的通解**

注记 1：要想求出 $y''+py'+qy=0$ **的通解，只需要找到**

它的两个不同的解且比值为非常数即可

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

若 $y=y(x)$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解

y_1'' 与 y_1' 及 y 应有较好的等量关系

联想函数 $y=e^{rx}$ 具有 $y''=ry'=r^2y$

猜想 $y=e^{rx}$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解

$y=e^{rx}$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的解充要条件

$$r^2+pr+q=0$$

特征方程

其根称为特征根

由于 $r^2+pr+q=0$ 一定有解

函数 $y=e^{rx}$ 一定是 $y''+py'+qy=0$ 的解

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

$$r^2+pr+q=0$$

$\Delta>0$

有两个不同的实根

$r_1\neq r_2$

$y''+py'+qy=0$

两个不同的解

$y_1=e^{r_1x}\quad y_2=e^{r_2x}$

$y_1/y_2\neq$ 常数

$y''+py'+qy=0$ 通解

$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

其中 C_1,C_2 为任意的常数

$\Delta=0$

有两个相等的实根

$r=r_1=r_2$

$y''+py'+qy=0$

两个不同的解

$y_1=e^{rx},y_2=xe^{rx}$

$y_1/y_2\neq$ 常数

$y''+py'+qy=0$ 通解

$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

$\Delta<0$

有两个共轭的虚根

$r=\alpha\pm i\beta$

$y''+py'+qy=0$

两个不同的解

$y_1=e^{\alpha x+i\beta x}\quad y_2=e^{\alpha x-i\beta x}$

$\overline{y_1}=\dfrac{y_1+y_1}{2}$

$\overline{y_2}=\dfrac{y_1-y_1}{2i}$

$y''+py'+qy=0$ 通解

$y=\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

注记 2：求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的步骤为:

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$

第二步　求出特征方程的两个根 r_1, r_2

第三步　根据特征方程的两个根的不同情况，写出微分方程的通解.

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
（1）两个不同的实根 $r_1 \neq r_2$	（1） $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
（2）两个相同的实根 $r_1 = r_2$	（2） $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
（3）一对共轭复根 $r=\alpha \pm i\beta$	（3） $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

<table>
<tr>
<td>

例 1 求 $y''+2y'-3y=0$ 通解.

解：（1）特征方程为 $r^2+2r-3=0$.

（2）解得：$r_1=-3,\quad r_2=1$.

（3）得通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

</td>
<td>

例 2 求 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解：（1）特征方程为 $r^2+4r+4=0$.

（2）得特征根 $r_1=r_2=-2$.

（3）通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

反过来：若 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$. 问：$p=?,q=?$.

</td>
<td>

反过来：若 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$ 问：$p=?,q=?$

</td>
</tr>
</table>

分析：（1）由已知可得特征根 $r_1=-3,r_2=1$ 即 $r^2+pr+q=0$ 的根为 $-3,1$.

（2）由韦达定理可得 $p=-(r_1+r_2)=2,q=r_1r_2=-3.$.

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解

例 3 求 $y''+y=0$ 的通解.

解：（1）特征方程为 $r^2+1=0$.

（2）解得：$r=\pm i$.

（3）得通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

反过来：若 $y''+py'+qy=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

问：$p=?,q=?$.

思考题： 已知函数 $y=f(x)$ 可微，

且 $f'(x)-\int_0^x f(t)dt=x$. $f(0)=1$

求 $y=f(x)$

分析：（1）找出 $y=f(x)$ 满足的微分方程

（2）求微分方程 $y''-y=0$ 的通解

（3）求微分方程 $y''-y=1$ 的特解

（4）求微分方程 $y''-y=1$ 的通解

（5）求微分方程 $y''-y=1$ 的满足

$y'(0)=0$，$y(0)=1$ 的解