§6.3 一阶线性微分方程

主要内容

- 一阶齐次线性微分方程
- 一阶非齐次线性微分方程

一、一阶线性微分方程的定义

定义 1：形如 $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)}$ 的方程叫做**一阶线性**微分方程.其中

$P(x), Q(x)$

为已知函数

只含未知函数的一阶导数且系数为1

未知函数是一次的

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

已知函数

已知函数

$Q(x) \not\equiv 0$

称为非**齐次**线性方程

$Q(x) \equiv 0$

称为**齐次**线性方程

方程 $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=0}$ 叫做对应于非齐次线性方程 $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)}$ 的齐次线性方程

一、一阶线性微分方程的定义

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

课堂训练 1：判断正误：下列错误的是

（1） $\frac{dy}{dx}-y^2=1$ 是一阶线性微分方程.

（2） $y\frac{dy}{dx}-x^2y=\sin x$ 是一阶线性微分方程.

（3） $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ 是一阶齐次线性微分方程.

（4） $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 是一阶非齐次线性微分方程.

二、一阶非线性微分方程的解法—常数变易法

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ （1）的解法

第一步分离变量

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

第二步两边积分

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$$

第三步求出通解

$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C=\pm e^{C_1})$$

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ （2）的解法

第四步设通解

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

第五步代入求出$u'(x)$

$$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

第六步代入求出$u(x)$

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

第七步代入求出y

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

二、一阶非线性微分方程的解法—常数变易法

例　求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解：　先求 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ 的通解.

（1）分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$

（2）积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$

（3）即齐次线性方程的通解为

$$y=C(x+1)^2$$

（4）常数变易：把 C 换成 u ，

$$y=u(x+1)^2$$

（5）把 y 代入所给非齐次线性方程，得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

（6）两边积分，得

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

（7）将 u 代入得方程的通解为

$$y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2$$