线性代数

高景利
南阳师范学院数学与统计学院

目　　录

目 录

- 1.了解矩阵的初等变换和矩阵等价的概念.
- 2.理解矩阵的秩的概念 及性质，掌握求矩阵秩的方法.
- 3.熟练掌握初等变换求线性方程组解的方法.
- 4.理解线性方程组解的判定定理.

学习考研要求

- 1.了解矩阵的初等变换和矩阵等价的概念.掌握初等变换求逆矩阵的方法.
- 2.了解初等矩阵的定义，掌握初等矩阵的性质，理解矩阵乘法与矩阵等价之间的关系.
- 3.理解矩阵的秩的概念，掌握矩阵秩的性质及求法.
- 4. 熟练掌握初等变换求线性方程组解的方法.
- 5.理解线性方程组解的判定定理，能用判定定理判断系数含参数方程组解的情况.

第一节　矩阵的初等变换

引入

利用消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases}$$

A

解

$$A \xrightarrow[\substack{(2) \\ (3)\div 2}]{(1)\leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} B_1$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)-2(1) \\ (4)-3(1)}]{(2)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} B_2$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)+5(2)\\(4)-3(2)}]{(2)\div 2}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & (1)\\ x_2-x_3+x_4=0 & (2)\\ 2x_4=-6 & (3)\\ x_4=-3 & (4)\end{cases}$$

B_3

$$\xrightarrow[(4)-2(3)]{(3)\leftrightarrow(4)}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & (1)\\ x_2-x_3+x_4=0 & (2)\\ x_4=-3 & (3)\\ 0=0 & (4)\end{cases}$$

B_4

于是，解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

B_5

其中，x_3 是自由未知数，可以任意取值.

令 $x_3 = c$，方程组的解可记为：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

1. 初等变换

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行（列）变换

(1) 互换矩阵的某两行(列)；

记作 $r_i \leftrightarrow r_j \quad (c_i \leftrightarrow c_j)$

(2) 用数 $k \neq o$ 乘矩阵的某一行(列)；

记作 $r_i \times k \quad (c_i \times k)$

(3) 把矩阵的某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上去；

记作 $r_i + kr_j \quad (c_i + kc_j)$

矩阵的初等行变化与初等列变换统称为**矩阵的初等变换**

三种初等变换都是可逆的.且其逆变换是同一类型的初等变换，即

$r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身

$r_i \times k$ 的逆变换是 $r_i \times \frac{1}{k}$

$r_i + kr_j$ 的逆变换是 $r_i - kr_j$

2. 矩阵等价

定义　若矩阵A经过有限次初等行（列）变换化为矩阵B，则称矩阵A与B**行（列）等价**，记作

$$A\overset{r}{\sim}B\quad\left(A\overset{c}{\sim}B\right)$$

若矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵B，则称矩阵A与B**等价**，记作$A\sim B$

性质　(1) 反身性：　$A\sim A$；

(2) 对称性：若$A\sim B$，则$B\sim A$；

(3) 传递性：若$A\sim B$，$B\sim C$　则$A\sim C$.

下面用矩阵的初等行变换来解方程组（1），其过程可与方程组（1）的消元过程一一对照

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div 2}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \triangleq B_1$$

$$\begin{matrix} r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1 \\ \sim \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} == B_2$$

$$\begin{matrix} r_2 \div 2 \\ r_3 + 5r_2 \\ \sim \\ r_4 - 3r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} == B_3$$

$$\begin{matrix} r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \\ r_4 - 2r_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} == B_4$$

由方程组（　）得到解的回代过程，也可用矩阵的初等行变换来完成，即

$$B_4 \underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\triangle}{=\!=} B_5$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方全是0；每个台阶只有一行，台阶数就是非零行的行数；阶梯线的竖线，每段竖线的长度为一行，竖线后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元.

$$B_5=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵，其特点是：非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在的列的其他元素都为0.

命题1　对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

对行最简形矩阵再施以初等列变换，可变成一种形状更简单的矩阵，即

$$B_5=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{c_5-4c_1-3c_2+3c_3}{\overset{\substack{c_3\leftrightarrow c_4\\c_4+c_1+c_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的*标准形*，其特点是：**F的左上角是一个单位阵，其余元素全为0**

命题2 对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等变换把它化为标准形

$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

此标准形由 m,n,r 三个数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

例1 化矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 为标准形.

3. 初等矩阵：　由单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵，称为**初等矩阵**.

(1)

$$E(i,j)=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{matrix}
\\
\begin{matrix} \text{第}i\text{列} & \qquad\qquad & \text{第}j\text{列} \end{matrix} &
\end{array}$$

(2)

$$E(i(k))=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 第\ i\ 行 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ 第\ i\ 列 & \end{array}$$

(3)

$$
E\big(i(k),j\big)=E\big(i,j(k)\big)=
\begin{array}{rc}
\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & & \\
 & & k & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
 & \text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
$$

学习内容

初等矩阵的转置仍是同类初等矩阵:

$$E(i,j)^T=E(i,j)\qquad E(i(k))^T=E(i(k))$$

$$E(i(k),j)^T=E(j,i(k))$$

初等矩阵可逆，且它们的逆矩阵还是初等矩阵：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)\qquad E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$E(i(k),j)^{-1}=E(i(-k),j)$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$$

定理　若对 $A_{m\times n}$ 作一次初等行(列)变换，则相当于对 A 左(右)乘一个相应的 $m(n)$ 阶初等矩阵.

定理　方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ ，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$

定理　设 A 与 B 为 $m\times n$ 矩阵，那么：

(i) $A\overset{r}{\sim}B \Leftrightarrow$ 是存在 m 阶可逆矩阵 P ，使 $PA=B$

(ii) $A\overset{c}{\sim}B \Leftrightarrow$ 是存在 n 阶可逆矩阵 Q ，使 $AQ=B$

(iii) $A\sim B \Leftrightarrow$ 是存在可逆矩阵 P 及 Q ，使 $PAQ=B$

推论 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$

推论 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \overset{c}{\sim} E$

推论 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \sim E$

4. 初等变换求逆法

理论：（1）n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $A\overset{r}{\sim}E$

（2）$A\overset{r}{\sim}E$ 即是 A 可经过有限次初等行变换化为 E

（3） 若对A作一次初等行变换，则相当于对A左乘一个相应的n阶初等矩阵.

方法： 先构造一个$n\times 2n$ 矩阵 (A,E)，然后对其进行初等行变换，当左侧矩阵 A成为单位矩阵时，右侧矩阵 E 则成为A^{-1} ．即

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1})$$

例2　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 求其逆矩阵 A^{-1}.

4. 矩阵方程

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

其中 A , B , C 为系数矩阵或常数矩阵，
X 为未知矩阵.

例3　设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

解矩阵方程　$A^2(X^{-1}A)^{-1} = 2B + X$

第二节　矩阵的秩

1. 矩阵秩的定义

定义　在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列 $(k\le m, k\le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义 设矩阵 A 中有一个不等于0的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$阶子式（如果存在的话）全等于0，那么 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

规定零矩阵的秩等于零.

若矩阵 A 的所有 $r+1$ 阶子式等于零，则它所有的高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零.

2. 矩阵秩的性质

(i) $0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$，$r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$；

(ii) 若矩阵 A中有某个 s阶子式不为0，则 $R(A) \ge s$

(iii)若矩阵 A中有所有 t 阶子式等于0，则 $R(A) < t$

(iv)矩阵A的秩＝r 的充分必要条件是A有一个r 阶子式不为0，而所有(包含该r 阶子式)的$r+1$阶子式全为0;

(v) $r(A+B) \le r(A)+r(B)$;

(vi) $r(A,B) \le r(A)+r(B)$ ；

(vii) $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$;

(viii) 若A可逆，则 $r(AB) = r(B)$;

(ix)同阶矩阵A和B等价的充要条件是 $r(A) = r(B)$;

(x)n阶方阵A可逆的充分必要条件是 $r(A) = n$;

(xi)初等变换不改变矩阵的秩 .

例4 设A为 n 阶方阵，证明

$$R(A+E)+R(A-E)\ge n$$

3. 矩阵秩的求法

3.1 原理

（1）若 $A \sim B$ ，则 $R(A)=R(B)$

（2）行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数

3.2 具体做法

对所求矩阵 A 进行初等行变换化为行阶梯型矩阵，则行阶梯形矩阵的非零行的行数即为矩阵 A 的秩.

例5 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

例6　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$$

已知 $R(A)=2$，求 λ,μ 的值.

第三节 求解线性方程组

线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

特别地，$b_j = 0 \ \left(j = 1,2,\cdots,m \right)$

称为齐次线性方程组，记 (II)

线性方程组的矩阵形式　$Ax = b$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称矩阵 $B=(A,b)$ 为线性方程组 (I) 的**增广矩阵**

齐次线性方程组的矩阵形式 $Ax = o$

1.非齐次线性方程组 (I) 解的判断

(1) $r(A)=r(\overline{A})=n$ ， 方程组有唯一解;

(2) $r(A)=r(\overline{A})<n$ ， 方程组有无穷多组解;

(3) $r(A)\neq r(\overline{A})$ ， 方程组无解.

2.齐次线性方程组 (II) 解的判断

(1) $r(A)=n$ ， 方程组有唯一零解;

(2) $r(A)<n$ ， 方程组有非零解.

例1 判别线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

例2 当 k 取什么值时方程组有非零解.

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

定理 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, B)$

问题讨论

- 1.矩阵的初等变换与行列式的性质2,3,6的区别?
- 2.化行阶梯型矩阵与化三角行列式的区别?
- 3.讨论矩阵的秩的定义及性质?
- 4.线性方程组解的判定及求法?
- 5.讨论矩阵初等行变换与消元法解线性方程组的关系?