第三章　中值定理与导数的应用

柯西，A.-L.

费马，P.de

第三章　中值定理与导数的应用

主要内容：

一、中值定理

二、洛必达法则

三、泰勒中值定理

四、函数的单调性与曲线的凹凸性

五、函数的极致与最值

五、函数图形的描绘

§3.1 中值定理

主要内容：

一、极值概念及费马引理

二、罗尔中值定理

三、拉格朗日中值定理

四、柯西中值定理

一、极值概念及费马引理

1. 极值的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D 如果存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)\subset D$， 使得对任意的 $x\in U(x_0)$	（1）都有 $f(x)\le f(x_0)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 点 x_0 处有极大值 $f(x_0)$. 点 x_0 称为极大值点.	（2）都有 $f(x)\ge f(x_0)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 点 x_0 处有极小值 $f(x_0)$. 点 x_0 称为极小值点.
极大值和极小值统称为极值；极大值点和极小值点统称为极值点		
注记1：若函数的最（大小）值在区间内部取得，则它一定是极值.		

一、极值概念及费马引理

2. 费马引理

费马，P. de

（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 $\boxed{\text{点 } x_0 \text{ 处可导}}$

（2）函数 $f(x)$ 在点 $\boxed{x_0 \text{ 取到极值}}$

则

$$\boxed{f'(x_0)=0}$$

我们把导数为零的点称为函数的驻点（或称稳定点，临界点）

注记 2：可导函数的极值点一定是驻点.

费马引理的证明分析

不妨设 $x \in U(x_0)$ 时 $f(x) \le f(x_0)$， 于是，对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$，

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0)$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$$

当 $\Delta x > 0$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$$

极限的保号性

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$$

当 $\Delta x < 0$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$$

$f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = 0$$

费马引理的证明

费马，P. de

证明： 不妨设 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，于是，对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，

有
$$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)\,,$$

从而当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$

当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0.$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性，便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0\,,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$

所以
$$f'(x_0)=0\,.$$

二、罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足

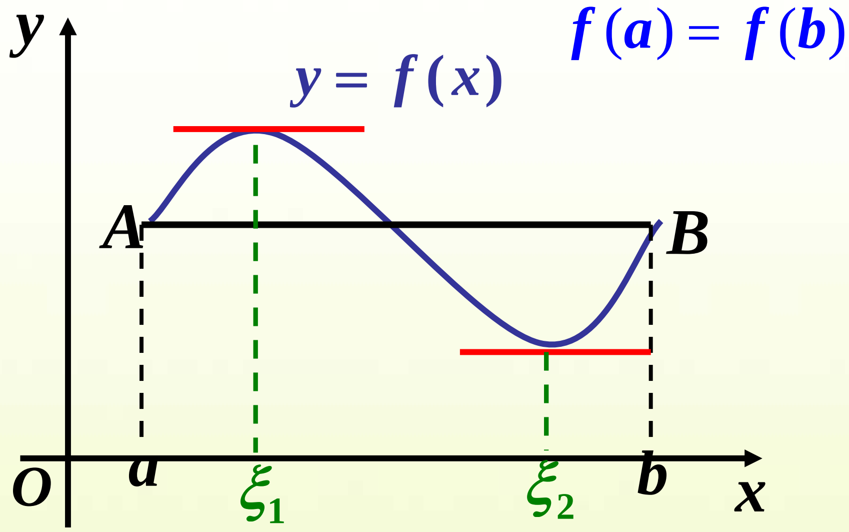
（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）$\boxed{f(a)=f(b)}$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得.

$\boxed{f'(\xi)=0}$



导数为零欲论证
罗尔定理负重任

罗尔定理的证明过程分析

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得它的最大值 M 和最小值 m

$f(a)=f(b)$

$M=m$

$f(x)=C$ 是常函数

$f'(x)=0$

$M\neq m$

M,m 不能同时取在端点

M,m 至少有一个取在 (a,b) 内
不妨设 M 取在 (a,b) 内部即
在 (a,b) 内至少存在一点
ξ 使 $f(\xi)=M$.

存在 ξ 的某一邻域
ξ 是该邻域内的
极大值点

费马定理可得

在 (a,b) 内至少有一点 ξ
使得 $\boxed{f'(\xi)=0}$

罗尔定理的证明

证明：由已知条件知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必取得它的最大值 M 和最小值 m

（1）如果 $\boxed{M=m}$， $f(x)$ 是常函数，则 $f'(x)=0$ 定理的结论显然成立.

（2）如果 $\boxed{M\neq m}$， $f(x)$ 不是常函数. 由于 $f(a)=f(b)$，因此 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上

最值不能同时取在端点. 不妨 $M\neq f(a)$. 则 $M\neq f(b)$.所以在 (a,b) 内至少存在一点

所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$. 因此存在 ξ 的某一邻域， ξ 是该

邻域的极值点. 由费马引理可得

$$\boxed{f'(\xi)=0}$$

二、罗尔定理

例 1：验证 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 满足罗尔定理，并求出 ξ

解：显然 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上连续，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 上可导.

又

$$\ln\sin\frac{\pi}{6}=-\ln 2,\quad \ln\sin\frac{5\pi}{6}=-\ln 2,$$

即 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})$. 所以 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理条件.

显然

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

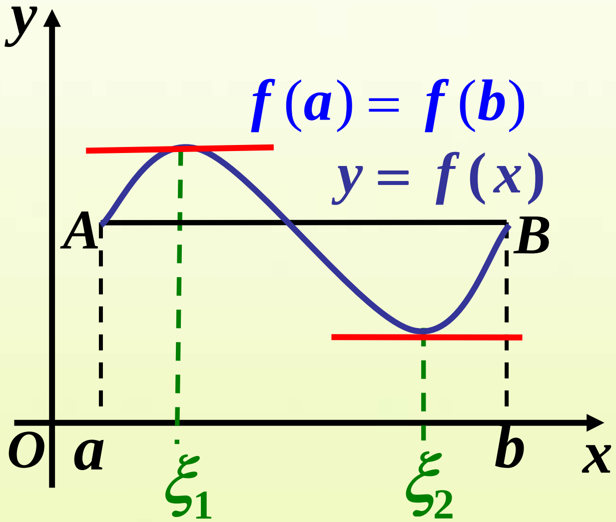
令 $f'(x)=0$ 即 $\cot x=0$，则 $x=\frac{\pi}{2}$. 取 $\xi=\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 即 $f'(\xi)=0$

因此 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 满足罗尔定理的结论

罗尔定理的几何意义

（1）在闭区间上连续（2）在开区间内可导（3）端点纵坐标相等

的函数的图形上至少有一点处的切线是水平的.



有水平的切线

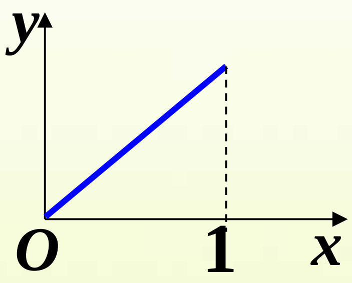
斜率$k = f'(\xi_1) = 0$

斜率$k = f'(\xi_2) = 0$

课堂训练

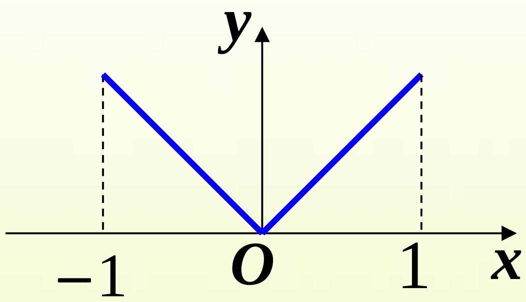
判断下列函数在给定的区间上是否满足罗尔定理的条件与结论

（1） $f(x)=x$，　$x\in[0,1]$



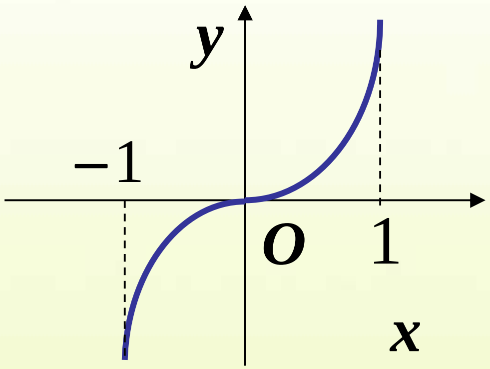
$f(x)=x(0\le x\le 1)$
满足（1）（2）
不满足（3）
且结论不成立

（2） $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$



$f(x)=|x|, x\in[-1,1]$
满足（1）（3）
不满足（2）
且结论不成立

（3） $f(x)=x^3, x\in[-1,1]$



$f(x)=x^3, x\in[-1,1]$
满足（1）（2）
不满足（3）
但是结论成立

注记 3：罗尔定理的三个条件至少有一个不成立时其结论可能成立也可能不成立.

二、罗尔定理

例 2：不管b取何值，方程$x^3-3x+b=0$在$(-1,1)$上至多有一个实解.

解：设$f(x)=x^3-3x+b$假设方程$f(x)=0$有两个实解$x_1,x_2\in(-1,1)$,

$$-1<x_1<x_2<1.$$

显然$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)上可导，且$f(x_1)=f(x_2)=0$

由罗尔定理可知，至少存在一个$\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\xi)=0$

但当$-1<x_1<\xi<x_2<1$ 时 $f'(\xi)=3\xi^2-3\xi=3(\xi-1)(\xi+1)<0$

矛盾. 故假设不成立. 因此命题真.

二、罗尔定理

例 3：判断正误.

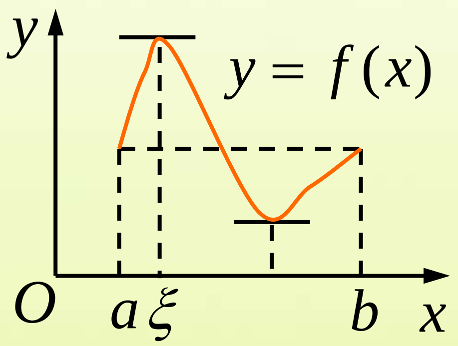
1. 设 $f(x)=x^{100}(x^{10}-1)$，则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

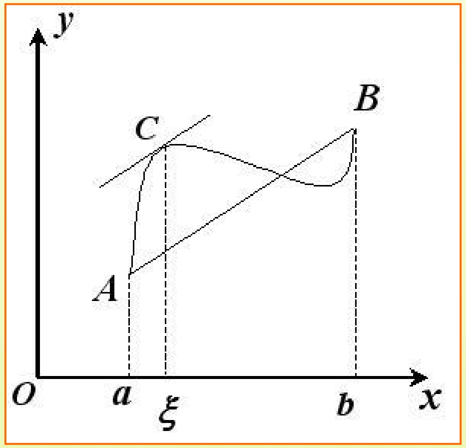
2. 设 $f(x)=x\sin x$，则当 $x\in(0,\pi)$ 时曲线 $y=x\sin x$ 上至少有一点的

切线是水平的.

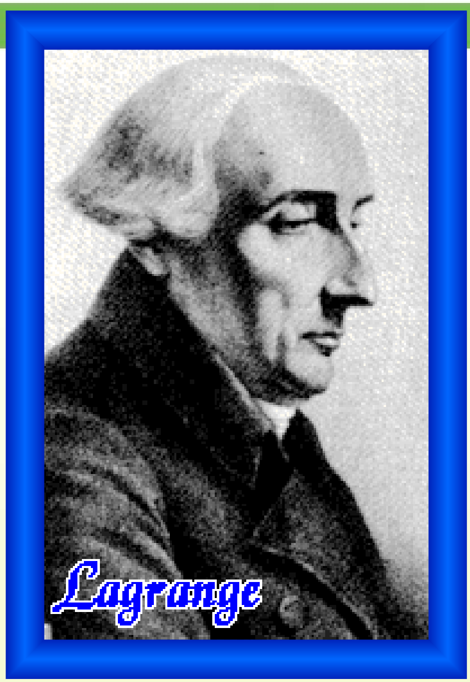
观　察

若取消罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这个特殊条件，如图所示. 此时，连续曲线 $y=f(x)$ 的 AB 上除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，那么弧上至少有一点 C，使曲线在 C 点处的切线平行于弦 AB





三、拉格朗日中值定理



如果函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\boxed{f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)}$$

成立.

拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理结论分析

要证明结论我们只要证明

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times 1$$

我们只要证明

导数的运算法则

$$\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$$

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}$$

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

只要证明 $\varphi'(\xi)=0$

只要证明函数 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理条件即可

也就是要证明

（1） $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2） $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上可导

（3） $\varphi(a)=\varphi(b)$

拉格朗日中值定理证明分析

令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

由于函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续

（2）在开区间 (a,b) 内可导

$$\varphi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$\varphi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

（1） $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2） $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上可导

（3） $\varphi(a)=\varphi(b)$

由罗尔定理可知

至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ **使得** $\varphi'(\xi)=0$

至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ **使得** $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

三、拉格朗日中值定理

注记 4：　当 $a<b$ 时，　$f(b)-f(a)=\left(b-a\right)f'(\xi)$ 成立

当 $a>b$ 时，公式 $f(b)-f(a)=\left(b-a\right)f'(\xi)$ 仍成立

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x \quad（\xi 在 x 与 x+\Delta x 之间）$$

（1）当 $\Delta x>0$ 时

$$x<\xi<x+\Delta x$$

$$x<x+\theta\cdot\Delta x<x+\Delta x$$

$$0<\theta\cdot\Delta x<\Delta x$$

$$0<\theta<1$$

令 $\xi=x+\theta\cdot\Delta x$

（2）当 $\Delta x<0$ 时

$$x+\Delta x<\xi<x$$

$$x+\Delta x<x+\theta\cdot\Delta x<x$$

$$\Delta x<\theta\cdot\Delta x<0$$

$$0<\theta<1$$

$$\xi=x+\theta\cdot\Delta x \quad（0<\theta<1）$$

拉格朗日中值定理也称为微分中值定理或有限增值定理

2. 拉格朗日中值公式的不同形式

（1） $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ （ξ在a,b之间）

拉格朗日中值公式

（2） $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ （ξ在a,b之间）

（3） $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$ （ξ介于x与$x+\Delta x$之间）

（4） $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad (0<\theta<1)$

增量Δy的精确表达式.

有限增量公式

拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广

<table>
<tr><th colspan="2">比 较</th></tr>
<tr>
<td>如果函数 $f(x)$ 满足：
（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
（2）在开区间 (a,b) 内可导；
（3） $f(a)=f(b)$，</td>
<td>如果函数 $f(x)$ 满足：
（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
（2）在开区间 (a,b) 内可导，</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得.</td></tr>
<tr>
<td>$f'(\xi)=0$ $\xleftarrow{f(a)=f(b)}$</td>
<td>$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$</td>
</tr>
</table>

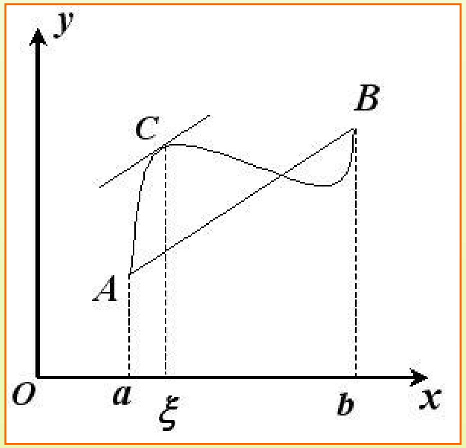
三、拉格朗日中值定理

3. 拉格朗日中值定理的几何意义

在两个高度不相同的点之间的连续曲线上若除端点外，

每一点都有不垂直于轴的切线，则其中必

有一条切线平行于两个端点的连线



三、拉格朗日中值定理

4. 推论：如果 $f(x)$ 在区间 I 的导数为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上为常数

分析　在区间上任取两点 $x_1 < x_2$

拉格朗日中值定理

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(\xi) = 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$f(x_2) = f(x_1)$$

因为 x_1, x_2 是 I 上任意两点， $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数

三、拉格朗日中值定理

注记 5 应用拉格朗日中值定理的推论证明在区间 I 上 $f(x)=C$ 的步骤

第一步：写出 $f(x)$ 的表达式

第二步：证明在区间 I 上 $f'(x)\equiv 0$

第三步：证明在区间 I 上有一点 x_0 使得 $f(x_0)=C$

三、拉格朗日中值定理

例 1 证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$

证明：设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x, x\in[-1,1]$

当 $x\in(-1,1)$时，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})=0$

由拉格朗日中值定理的推论可得 $x\in(-1,1)$时，$f(x)\equiv C$

又$0\in(-1,1)$,且 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$

所以当 $x\in(-1,1)$时，$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

又当 $x=\pm1$时，$f(x)=\frac{\pi}{2}$，所以 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$

三、拉格朗日中值定理

例 2　　证明：对与任意的实数 x_1, x_2，都有 $|\arctan x_2 - \arctan x_1| \le |x_2 - x_1|$ 成立

证明：设 $f(x) = \arctan x$，　当 $x_1 = x_2$ 时，不等式显然成立

当 $x_1 \ne x_2$ 时，不妨假设 $x_1 < x_2$. 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，在 (x_1, x_2) 可导

由拉格朗日中值定理可得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

又

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

所以

$$f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \le 1 \qquad (x_1 < \xi < x_2)$$

因此　$|\arctan x_2 - \arctan x_1| = |f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \le |x_2 - x_1|$

三、拉格朗日中值定理

注记 7：利用拉格朗日中值定理证明不等式的步骤

第一步：把不等式的一边改写为函数值差的形式即 $f(b)-f(a) \quad (b>a)$

第二步：确定函数 $f(x)$ 的表达式及端点 a,b 使得函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

在 (a,b) 内可导

第三步：写出拉格朗日中值公式的某种表达式

第四步：求导数 $f'(x)$，并由此求出 $f'(\xi)$

第五步：将 $f'(\xi)$ 的式子代入拉格朗日中值定理的表达式中，利用 ξ 的取值

范围将等式放大或缩小以证出不等式

三、拉格朗日中值定理

例 3　证明：　当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

分析：（1）改写不等式的一边为函数值的差 $\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)\quad(x>0)$

（2）确定函数 $f(t)=\ln(1+t)$ 及端点 $a=0,b=x$ 使得 $f(t)=\ln(1+t)$ 在 $[0,x]$ 上连续

在 $(0,x)$ 内可导

（3）写出拉格朗日中值公式表达式 $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),(0<\xi<x)$

（4）求出 $f'(\xi)$. 由于 $f'(t)=\frac{1}{1+t}$, 所以 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi}$

（5）将 $f'(\xi)$ 代入拉格朗日中值公式中得到等式 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$,

利用 $0<\xi<x$ 证明出不等式

三、拉格朗日中值定理

例 3　证明：　当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

证明：设 $f(t)=\ln(1+t)$. 显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 连续，在 $(0,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理可得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x)$$

又 $f(0)=0,\ f'(t)=\frac{1}{1+t}$，所以 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi}$，

故

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},$$

又 $0<\xi<x$, 所以 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$, 因此 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$,

即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

四、柯西中值定理

柯西中值定理 ：

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

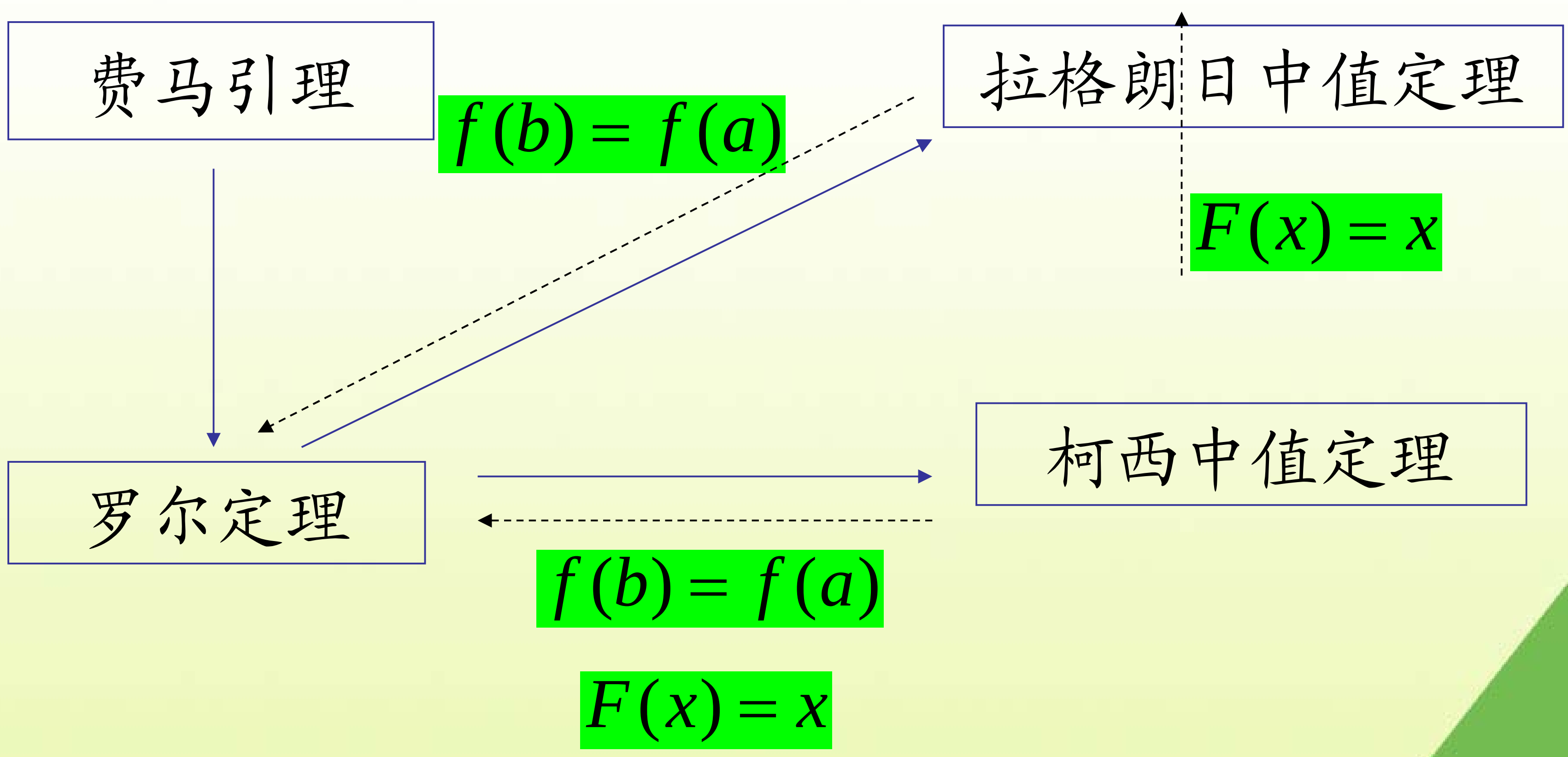
(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x\in(a,b), F'(x)\neq 0$，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

四个定理之间的关系



四个定理的应用

（1） 证明恒等式

（2） 证明不等式

（3） 证明方程根的存在性与唯一性

关键：
利用逆向思维设辅助函数

四个定理的应用

（1）证明函数在某点的导数为零时可以用费马定理解决

（2）证明函数为常数时可以用拉格朗日中值定理的推论解决

（3）涉及方程的根的个数问题可以用罗尔定理去解决

（4）涉及不等式的问题可以用拉格朗日中值定理去解决

（5）涉及到函数值差的问题可以用拉格朗日中值定理去解决

（6）涉及到两函数增量比的问题可以用柯西中值定理去解决

部分考研题

1. （05 年，12 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(0)=0$， $f(1)=1$.

证明： （I）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$， 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

2.（07 年，11 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值， $f(a)=g(a)$， $f(b)=g(b)$.证明：存在 $\xi\in(a,b)$， 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

3. （09 年，11 分）证明拉格朗日中值定理.

.

§3.2　洛必达法则

主要内容：

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式

§3.2 洛必达法则

（1）观察： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ 发现： $\lim\limits_{x\to 0}\sin ax=\lim\limits_{x\to 0}\sin bx=0$

（2）观察： $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 发现： $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty}x=\infty$

若 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$，则称 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式

若 $\lim f(x)=\infty, \lim g(x)=\infty$，则称 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

一、$\frac{0}{0}$型未定式

定理 1 设（1）$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0}$；

（2）$f(x),g(x)$在点x_0的某去心邻域内可导，并且$\boxed{g'(x)\neq 0}$，

（3）极限$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$存在或为$\infty$

那么

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则

复习---柯西中值定理

第三章

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x \in (a,b), F'(x) \neq 0$，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

关于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的证明思路

（1）将 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 改写为 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ 的形式

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 x_0 无关,因此可以假定 $f(x_0)=g(x_0)=0$，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

（2）利用**柯西中值定理**找出 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ 与 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 的关系

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ （ξ 介于 x_0 及 x 之间），

（3）利用 $x\to x_0$ 时 $\xi\to x_0$ 证得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 x_0 无关，因此可

以假定 $f(x_0)=g(x_0)=0$

$f(x),g(x)$ **在点** x_0 **的某去心邻域内可导，并且** $g'(x)\neq 0$

在以 x_0 及 x 为端点的区间上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 满足柯西中值定理的条件

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

柯西中值定理

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad（\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 及 } x \text{ 之间}）$$

当 $x\to x_0$ 时

由夹逼准则可得

$\xi\to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 1 的证明：

证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}$与$x_0$无关，因此可以假定 $f(x_0)=g(x_0)=0$，

这样 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续，设 x 是该邻域内的一点（$x\neq x_0$），则

在以 x_0 及 x 为端点的区间上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 满足柯西中值定理的条件，故有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$（ξ 介于 x_0 及 x 之间），

令 $x\to x_0$，并对上式两端求极限，注意到 $x\to x_0$ 时 $\xi\to x_0$，

于是由条件（i i）便得到要证明的结论.

一、$\frac{0}{0}$型未定式

注记 1：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属于 $\frac{0}{0}$ 型，只要 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 满足洛必达法则

中的条件，则**可以继续分别对分子与分母求导数**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

注记 2 **可以将定理 1 极限过程延伸为 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$ 或 $x\to\infty$ 或 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.**

若（1） $\lim f(x)=\lim g(x)=0$

（2） $f(x),g(x)$ 在某一时刻后可导，并且 $g'(x)\neq 0$，

（3）极限 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞

那么

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

一、$\frac{0}{0}$型未定式

注记 3 利用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型未定式的思路.

（1）判断所求的极限为$\frac{0}{0}$型未定式即$\lim f(x)=\lim g(x)=0$

（2）判断$f(x),g(x)$在某一时刻后可导，并且$g'(x)\neq 0$，

（3）判断极限$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为∞

（4）利用$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$求出$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$

一、$\frac{0}{0}$型未定式

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$.

分析（1）验证当 $x \to 0$, 本题为 $\frac{0}{0}$ 型

（2）当 $x \neq 0$ 时， $(\sin ax)' = a\cos ax, (\sin bx)' = b\cos bx \neq 0$

（3） $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a\cos ax}{b\cos bx} = \dfrac{a}{b}$ 存在

解：显然本题为当 $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim_{x \to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{\lim\limits_{x \to 0}(a\cos ax)}{\lim\limits_{x \to 0}(b\cos bx)} = \frac{a}{b}$$

一、$\frac{0}{0}$型未定式

例2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

分析：（1）显然当 $x\to 1$ 时本题为 $\frac{0}{0}$ 型

（2）　显然 $f(x)=x^3-3x+2, g(x)=x^3-x^2-x+1$ 在点 $x_0=1$ 的某去心邻域内可导

$$f'(x)=3x^2-3, g'(x)=3x^2-2x-1\neq 0$$

（3）极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型

（4）计算 $f''(x)=6x, g'(x)=6x-2$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

一、$\frac{0}{0}$型未定式

例2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解：显然当 $x\to 0$ 时本题为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-3x+2\right)'}{\left(x^3-x^2-x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(3x^2-2x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(6x)}{\lim\limits_{x\to 1}(6x-2)}=\frac{3}{2}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$

（1）恒等变形 $\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$

（2） 利用 $x\to 0, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，将求 $\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$ 的极限转化为求 $2\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

（3）应用洛必达法则求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

将洛必达法则与其它求极限方法结合使用

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$.

解：显然 $\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$ 当 $x\to 0$ 时 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{x-\sin x}{x^3}\right]=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

显然当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型. 由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\frac{1}{3}$$

一、$\frac{0}{0}$型未定式

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解： 显然当 $x\to+\infty$ 本题为 $\dfrac{0}{0}$ 型，应用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 2 设（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；

（2）$f(x), g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，并且 $g'(x)\neq 0$，

（3）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞

那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

注记 4　可以将定理 2 极限过程的延伸为 $x \to x_0^+$ 或 $x \to x_0^-$ 或 $x \to \infty$ 或 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

若（1）$\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty$

（2）$f(x), g(x)$ 在某一时刻后可导，并且 $g'(x) \neq 0$，

（3）极限 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞

那么

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}$ $(\mu>0)$.

分析（1）验证当 $x\to+\infty$, 本题为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

（2）当 $x>0$ 时， $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}\neq 0$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\mu})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0$ 存在

解：显然当 $x\to+\infty$ 时本题为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\mu})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0.$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

注记 5：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型时，只要 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 满足洛必达法则中的条件，则**可以继续分别对分子与分母求导数而得**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

注记 6：由于 n 为正整数，因此不能对 n 求导.

所以求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 时不能使用洛必达法则

例 6：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}(n\in N^+,\lambda>0)$.

分析 （1） 显然当 $x\to+\infty$ 本题为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}$

（2） 显然当 $x\to+\infty$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}$ 仍为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$

（3）当 $x\to+\infty$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)\cdots 2x}{\lambda^{n-1}e^{\lambda x}}$ 仍为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 因此第 n 次使用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 2x}{\lambda^{n-1}e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}$$

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

例 6：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}(n\in N^+,\lambda>0)$.

解　显然当 $x\to+\infty$ 本题为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，n 次使用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^n\right)'}{\left(e^{\lambda x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(nx^{n-1}\right)'}{\left(\lambda e^{\lambda x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 2x}{\lambda^{n-1}e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[n(n-1)\cdots 2x\right]'}{\left[\lambda^{n-1}e^{\lambda x}\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

三、其它类型的未定式 $\left(0\cdot\infty,\ \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}\right)$

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow{\text{通分}} \boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \xleftarrow{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty}$$

$$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$$

$$0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty,$$

$$\text{或 } 0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}.$$

注记 7：（1）对 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$ 型未定式，通过代数恒等变形化为 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

三、其它类型的未定式 （$0\cdot\infty$， $\infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$）

例 7：求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\mu}\ln x(\mu>0)$.

分析：（1）判断是 $0\cdot\infty$ 型未定式

（2）将 $0\cdot\infty$ 型未定式化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 即 $x^{\mu}\ln x=\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}}$

（3）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $\left(x^{-\mu}\right)'=-\mu x^{-\mu-1}\neq 0$

（4）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(x^{-n}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{\mu}}{\mu}=0$ 存在

解　这是 $0\cdot\infty$ 型未定式，把 $x^{\mu}\ln x$ 改写为 $\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}}$ 于是得到 $x\to 0^+$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0^+} x^{n}\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-\mu}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{\mu}}{\mu}=0$$

三、其它类型的未定式 （$0\cdot\infty$， $\infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$）

例 8：求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

分析：（1）判断是 $\infty-\infty$ 型未定式

（2）利用通分将 $\infty-\infty$ 型未定式化为 $\dfrac{0}{0}$ 即

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

（3）$\left(x\ln x-(x-1)\right)'=\ln x,\quad \left((x-1)\ln x\right)'=\dfrac{x-1}{x}+\ln x$

所以

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$$

（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x\ln x)'}{(x-1+x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\ln x}{2+\ln x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(1+\ln x)}{\lim\limits_{x\to1}(2+\ln x)}$ 存在

例 8：求 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$.

解：显然这是 $\infty-\infty$ 型未定式.把 $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 改写为 $\dfrac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$.于是得到当

$x\to1$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 由洛必达法则可得

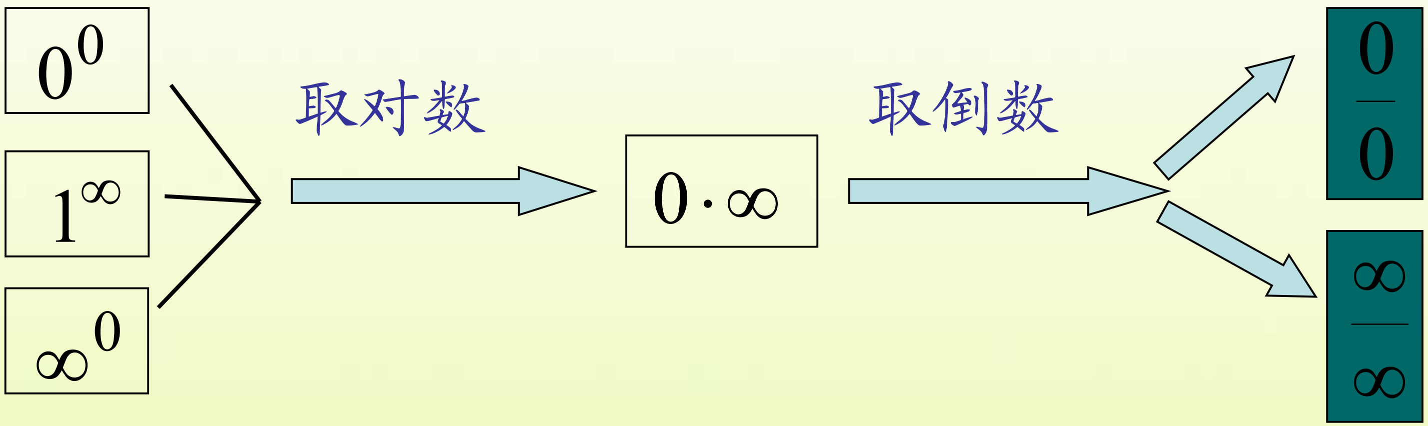
$$原式=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\left[x\ln x-(x-1)\right]'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}\ \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\dfrac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left[x\ln x\right]'}{\left[x-1+\ln x\right]'}=\lim_{x\to1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(1+\ln x)}{\lim\limits_{x\to1}(2+\ln x)}=\frac{1}{2}$$

三、其它类型的未定式 （$0\cdot\infty$， $\infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$）

注记 8：对 0^0 、1^{∞} 、∞^0 未定式，通过取对数的方式，转化为 $0\cdot\infty$ 型未定式，

再化为 $\frac{0}{0}$ 、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.



$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

三、其它类型的未定式 （$0\cdot\infty$， $\infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$）

例 9： $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

分析： （1）判断是 0^0 型未定式

（2）将 0^0 型未定式化：即 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$

（3）求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

解：这是 0^0 型未定式，由于 $x^x = e^{x\ln x}$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)}$

由例 7 知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right) = 0$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1$

例 10: 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能使用洛必达法则求出

当极限 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为 ∞ 时， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在

解： （1）当 $x\to 0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定型

（2）当 $x\to 0$， $\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 的极限不存在，所以不能使用洛必达法则

（3）由于 $\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0,$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

§3.3 泰勒中值定理

主要内容：

一、泰勒公式

二、带有佩亚洛余项的泰勒公式

三、麦克劳林公式

四、应用

泰勒，B.

一、问题的提出

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导

$\Downarrow$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微

$\Downarrow$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $\Delta x = x - x_0$ 时 $\Downarrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

令 $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\Downarrow$

$$f(x) - p_1(x) = o(x - x_0)(x \to x_0)$$

一、问题的提出

一般地, 函数 $f(x)$ 具备什么条件，可以找出一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

使其满足： （ⅰ） $f(x)-p_n(x)=o[(x-x_0)^n]$；

（ⅰⅰ） $|f(x)-p_n(x)|$ 有具体的表达形式.

二、泰勒中值定理

1. 泰勒公式

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，

则对于 $x \in (a,b)$， 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (1)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (2)$$

$f(x)$ 在 x_0 处关于 $(x-x_0)$ 的 n 阶泰勒公式

拉格朗日型余项

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在 x_0 处关于 $(x-x_0)$ 的 n 次泰勒多项式

二、泰勒中值定理

泰勒，B.

注记 1：（1）当 $n=0$ 时，泰勒公式变为拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

（2）当 $n=1$ 时，泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

注记 2：若 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

则 $$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

二、泰勒中值定理

2. 带有佩亚洛余项的泰勒公式

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

二、泰勒中值定理

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

当$x_0=0$时，由于ξ在 0 与x之间，令$\xi=\theta x\quad(0<\theta<1)$

则余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

二、泰勒中值定理

3. 麦克劳林公式

定理 2　如果函数 $f(x)$ 在含 $x_0=0$ 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，

则对于 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

由此得到近似公式：

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

三、泰勒公式的应用

★ **求函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\quad+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

★求极限

★求函数值的近似值

★证明不等式

三、泰勒公式的应用

1. 求函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\quad+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

注记 2 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 n 阶泰勒公式的步骤

第一步：求出 $y=f(x)$ 的 n 阶导数 $[f(x)]^{(n)}$

第二步：求出 $y=f(x)$ 的 n 阶导数在 $x=x_0$ 处的函数值 $[f(x)]^{(n)}\big|_{x=x_0}$

第三步：写出误差项，代入公式即可

.

三、泰勒公式的应用

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

例 1　求 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解：由于 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$，所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$，所以　$\therefore$

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)}$$

二、泰勒中值定理

$$f(x)= f(0)+ f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

例 2　求 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解：由于 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$，所以　$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$.因此 $f(0)=0,\ f'(0)=1,$

$$f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\cdots f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m,\cdots$$

所以

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x)$$

其中

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\frac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1))$$

二、泰勒中值定理

（2） $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + R_{2m}(x)$$

$$R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1} (0 < \theta < 1))$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1})$$

（3） $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + R_{2m+1}(x),$$

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2} (0 < \theta < 1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$$

（4） $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

（5） $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

（6） $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

（7） $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

三、泰勒公式的应用

2. 求极限

例 1：设 $f(x)$ 在 x_0 的附近有连续的二阶导数，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

解：由泰勒公式可得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

所以

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2$$ （ξ_1 在 x_0 与 x_0+h 之间）

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2$$ （ξ_2 在 x_0 与 x_0-h 之间）

因此

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\frac{f''(\xi_1)}{2!}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}$$ （ξ_2 在 x_0 与 x_0-h 之间）

当 $h\to 0$时，$\xi_1\to x_0,\xi_2\to x_0$，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{\xi_1\to x_0}\frac{f''(\xi_1)}{2!}+\lim_{\xi_2\to x_0}\frac{f''(\xi_2)}{2!}=f''(x_0)$$

例 2：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$

解：由 $\sin x, \cos x$ 的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式知

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3) \qquad \cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$$

所以

$$\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\frac{1-\dfrac{x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x}}{1-\left(1-\dfrac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)}=\frac{\dfrac{1}{3!}x^2-\dfrac{o(x^3)}{x}}{\dfrac{1}{2!}x^2+o(x^2)}=\frac{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{o(x^3)}{x^3}}{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{o(x^2)}{x^2}}$$

又

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3!}-\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}-\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{1}{2!}-\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

因此　原式= $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{3}$

三、泰勒公式的应用

3. 近似计算

（1） $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$

（2） $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}$

（3） $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$,

（4） $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

（5） $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

三、泰勒公式的应用

例 3：利用三阶泰勒公式求 $\sqrt{e}$ 的近似值，并求出误差

解：由泰勒公式可得 $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{4!}x^4 (0 < \theta < 1)$

取 $x = \frac{1}{2}$，则 $\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}}{4!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 (0 < \theta < 1)$

因此 $$\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 1.6458$$

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}}{4!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{4!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \frac{e}{4!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \frac{3}{4!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 < 0.01$$

三、泰勒公式的应用

4. 证明不等式

例 4：设函数 $y=f\left(x\right)$ 具有二阶导数, $f'\left(x\right)>0$, $f''\left(x\right)>0$,

Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy与dy 分别为 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处

对应的增量与微分, 证明 $\Delta x>0$ 时,则 $0<dy<\Delta y$

证明： 由泰勒中值定理可得

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(\xi)(\Delta x)^2$$

则

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(\xi)(\Delta x)^2$$

$$\Delta y=dy+\frac{1}{2!}f''(\xi)(\Delta x)^2$$

$\Delta x > 0$时，由于 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0, \xi$ $x + \Delta x$ 与 Δx 之间.所以

$$dy = f'(x)\Delta x > 0,$$

$$\frac{1}{2!} f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

因此 $\Delta y > dy > 0$

思考题

一、 求极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ln(1+x)-x}{x^2}$

二、证明不等式 $e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}, x\in(-\infty,+\infty)$.

§3.4 函数的单调性与凸凹性

主要内容

- 函数单调递的判定
  - 函数单增的判定
  - 函数单减的判定
- 曲线凸凹性与拐点
  - 曲线凸性的判定
  - 曲线凹性的判定

一、函数的单调性的判断

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1，x_2,	
（1）当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加	（2）当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少

是否有一种简便的方法判断函数在某一区间上的单调性？

一、函数的单调性的判断

1 判定定理：

定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导. 那么	
(1)　如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)=0$ 仅在有限个点处成立) 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；	(2)　如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$ ($f'(x)=0$ 仅在有限个点处成立) 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

注记 1：对开区间，无穷区间判断定理 1 也成立

注记 2：函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性

函数的单调性的判断定理的证明

已知函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导.

任取 $x_1,x_2\in[a,b]$

$x_1<x_2$

函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，在开区间 (x_1,x_2) 内可导

拉格朗日
中值定理

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2)$

如果在 (a,b) 内

$f'(x)>0$

$f'(\xi)>0$

$x_1<x_2$ 时 $f(x_1)<f(x_2)$

如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 则
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

如果在 (a,b) 内

$f'(x)<0$

$f'(\xi)<0$

$x_1<x_2$ 时 $f(x_1)>f(x_2)$

如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$ 则
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少；

函数的单调性的判断定理的证明

如果 $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 内的某点 $x=c$ 处等于零，而在其余点处 $f'(x)>0$

$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续在 (a,c) 可导且 $f'(x)>0$

$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上连续在 (c,b) 可导且 $f'(x)>0$

$y=f(x)$ 在 $[a,c]$ 上单调增加

$y=f(x)$ 在 $[c,b]$ 上单调增加

$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加

如果 $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 内的某点 $x=c$ 处等于零，而在其余点处 $f'(x)<0$

$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续在 (a,c) 可导且 $f'(x)<0$

$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上连续在 (c,b) 可导且 $f'(x)<0$

$y=f(x)$ 在 $[a,c]$ 上单调减少

$y=f(x)$ 在 $[c,b]$ 上单调减少

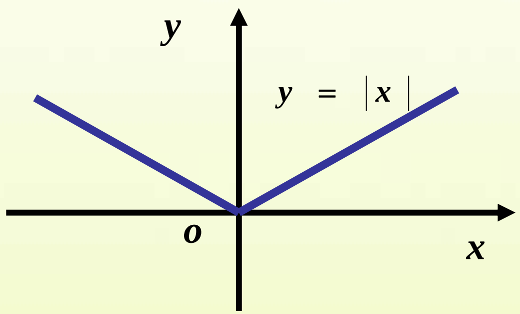
$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少

如果 $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 内的等于零的点为有限个只要它在其余各点处保持定号则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仍单调

一、函数的单调性的判断

如 $y=|x|, x\in(-\infty,+\infty)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递减，在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

不可导点 $x=0$ 是函数单调递增和单调递减的分界点.



注记 3：单调区间的分界点除驻点外，也可能是导数不存在的点.

注记 4：如果函数在某驻点两边导数同号，则不改变函数的单调性

$$y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$$

一、函数的单调性的判断

2. 判定定理的应用：

（1）判断函数在某区间上的单调性

例 1：判断函数 $y = x - \sin x$ **在区间** $[-\pi.\pi]$ **的单调性**

解： （1）**显然函数** $y = x - \sin x$ **在区间** $[-\pi, \pi]$ **上连续，在** $(-\pi, \pi)$ **内可导**

（2）当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时， $y' = 1 - \cos x \geq 0$ 且等号仅在 $x = 0$ 处成立

（3）由判定定理知函数 $y = x - \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 单增.

一、函数的单调性的判断

课堂训练

（1）判断函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的单调性

（2）判断函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性

（3）判断函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 及 $(0,+\infty)$ 内的单调性

一、函数的单调性的判断

2. 判定定理的应用：

（2）求函数的单调区间

注记 4：求单调区间的步骤

第一步：求出函数 $y=f(x)$ 的定义域

第二步：求导数 $f'(x)$

第三步：在定义区间内求出所有使 $f'(x)=0$ 和使 $f'(x)$ 不存在的点，并以这些点为分界点，将定义域分为若干个子区间；

第四步：（列表）判定 $f'(x)$ 在每个区间上的正负号

第五步：利用判断定理得出递增及递减区间

一、函数的单调性的判断

例 2. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 （1） 这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

（2）函数的导数为 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

（3）令 $f'(x)=0$，则 $x_1=1, x_2=2$

（4）列表

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

（5）函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 和 $[2, +\infty)$ 内单调增加，在区间 $[1, 2]$ 上单调减少

一、函数的单调性的判断

例 3　讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解: 函数的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$.

当 $x \neq 0$ 时，函数的导数为 $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

当 $x=0$ 时，函数的导数不存在

列表如下：

	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$
$f(x)$	↘		↗

因此函数在 $(-\infty,\ 0]$ 上单调递减，在 $[0,\ +\infty)$ 上单调递增.

一、函数的单调性的判断

2. 判定定理的应用：

（3）证明不等式

注记 5：利用函数的单调性证明不等式的步骤：

第一步：构造 $f(x)$ 并求出 $f'(x)$

第二步：判断 $f'(x)$ 的正负号，根据 $f'(x)$ 的正负号判断函数的单调性

第三步：利用函数的单调性得到不等式

一、函数的单调性的判断

例 4. 证明：当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

证明： 令 $f(x)=e^x-ex$，则 $f'(x)=e^x-e$. 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$,

因此 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加， 所以当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$.

由于 $f(1)=0$，故当 $x>1$ 时，

$$f(x)>0$$

即当 $x>1$ 时，$e^x-ex>0$，也就是 $e^x>ex$

一、函数的单调性的判断

2. 判定定理的应用：

（4）确定某些方程实根的个数

例 5　证明 $\sin x = x$ **在** $[-\pi, \pi]$ **只有一个实根**

证明： 令 $f(x) = \sin x - x$， 则 $f(\pi) = -\pi,\ f(-\pi) = \pi$， 即函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续且在两端点处的函数值异号. 由零点定理可知方程 $f(x) = 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上至少有一个实根.

显然 $f'(x) = \cos x - 1$， 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时， $f'(x) \le 0$ （等号仅在一点处成立）

所以 $f(x) = \sin x - x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 单调递减.因此 $f(x) = 0$ **在** $[-\pi, \pi]$ **只有一个实根**

二、曲线的凸凹性

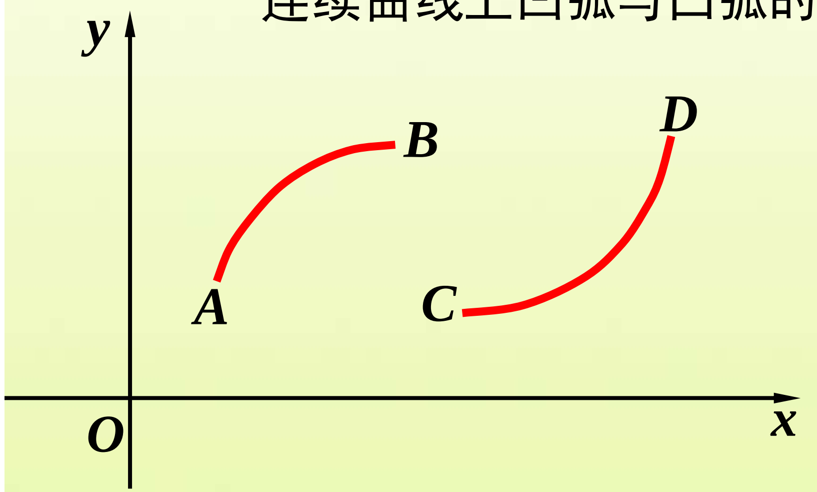
1. 定义

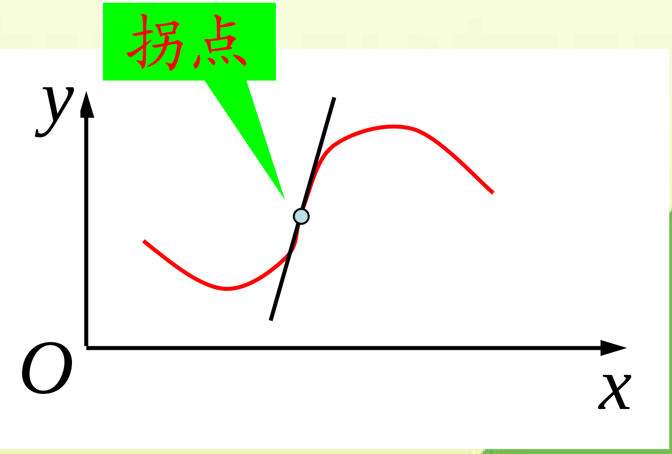
在区间 (a,b) 内, 如果曲线弧位于其每一点切线的上方,

那么就称曲线在区间 (a,b) 内是凹的;

如果曲线弧位于其每一点切线的下方, 那么就称曲线在区间 (a,b) 内是凸的.

连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为拐点





二、曲线的凸凹性

2. 判定定理

定理 2： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则

（1） 如果在 (a,b) 内 $f'(x)$ 单调递增, 那么曲线在 (a,b) 内是凹的;

（2） 如果在 (a,b) 内 $f'(x)$ 单调递减, , 那么曲线在 (a,b) 内是凸的.

推论 ： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$

（1） 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 那么曲线在 (a,b) 内是凹的;

（2） 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 那么曲线在 (a,b) 内是凸的.

注记 1：若函数二阶可导，则其对应的曲线的拐点 $(x_0, f(x_0))$ 满足 $f''(x_0)=0$

若函数在某点二阶导数不存在，则其对应曲线的拐点 $(x_0, f(x_0))$

可能是 $f''(x_0)$ 不存在的点

二、曲线的凸凹性

3. 判定定理的应用：

（1）判断曲线在某一区间上的凸凹性

例 **6.** 判断下列函数在指定区间上的凹凸性

（1）曲线 $y = \ln x \quad x \in (0, +\infty)$

（2）曲线 $y = x^3$， $x \in (0, +\infty)$

解：（1）显然 $y' = \frac{1}{x}$**，** $y'' = -\frac{1}{x^2}$**．当** $x \in (0, +\infty)$ $y'' < 0$ **所以曲线** $y = \ln x$ **在 (0，+∞) 内是凸的.**

（2）显然 $y' = 3x^2, y'' = 6x$ **. 所以当** $x \in (0, +\infty)$ $y'' > 0$ **,因此曲线** $y = x^3$

在 (0，+∞) 内是凹的

二、曲线的凸凹性

3. 判定定理的应用：

（2）求曲线的凸凹区间及拐点

注记 2　确定曲线 $y=f(x)$的凹凸区间的步骤:

第一步：确定函数 $y=f(x)$ **的定义域**

第二步：求出在二阶导数 $f''(x)$

第三步：求使二阶导数为零的点和使二阶导数不存在的点;

将定义域分为若干个子区间

第四步：判断函数的二阶导数在子区间上的符号

第五步：　利用判定定理确定出曲线凹凸区间及拐点

二、曲线的凸凹性

例 7：求函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 凸凹区间

解：（1）函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

（2）$y'=12x^3-12x^2$，$y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$；

（3）解方程 $y''=0$ 得 $x_1=0$，$x_2=\frac{2}{3}$；

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹		凸		凹

因此在区间 $(-\infty, 0]$ 和 $[2/3, +\infty)$ 上曲线是凹的，在区间 $[0, 2/3]$ 上曲线是凸的.

当 $x=0$ 时，$y=1$，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，$y=\frac{11}{27}$ 故，曲线的拐点为 $(0,1)$ 与 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$

二、曲线的凸凹性

例 9：判断下列曲线的是否有拐点

（1） $y=\sqrt[3]{x}$ （2） $y=x^4$

解：（1）函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

当 $x\neq 0$ 时， $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$， $y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$；

当 $x=0$ 二阶导数不存在. 显然 $x=0$ 将 $(-\infty, +\infty)$ 分为两部分 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$

x 的范围	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'' 的符号	+	不存在	—

由上表可以看出，曲线 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的，在【$0, +\infty)$ 上是凸的

二、曲线的凸凹性

例 9：判断下列曲线的是否有拐点.

（1） $y=\sqrt[3]{x}$ （2））$y=x^{4}$

解（2）显然 $y=x^4$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）.

$y'=4x^3, y''=12x^2$ 所以当 $x\neq 0$ 时，$y''>0$

故曲线 $y=x^4$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的，因此曲线无拐点.

§3.5 函数的极值与最值

第三章

主要内容

- 函数的极值
  - 函数极大值的判定
  - 函数极小值的判定
- 函数的最值
  - 函数最值的判定
  - 最值的应用

一、函数极值

1. 极值的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D 如果存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)\subset D$，使得对任意的 $x\in U(x_0)$	（1）都有 $f(x)\le f(x_0)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 点 x_0 处有极大值 $f(x_0)$. 点 x_0 称为极大值点.	（2）都有 $f(x)\ge f(x_0)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 点 x_0 处有极小值 $f(x_0)$. 点 x_0 称为极小值点.
极大值和极小值统称为极值；极大值点和极小值点统称为极值点		

一、函数极值

2 极值的判定

<table>
<tr>
<td rowspan="3">定理 1（必要条件） 设函数 $f(x)$.

（1）在 x_0 点处可导

（2）在 x_0 点取得极值,

则必有.

$\boxed{f'(x_0)=0}$</td>
<td>注记 1：可导函数的极值点一定是驻点.

但驻点却不一定是极值点</td>
</tr>
<tr>
<td>注记 2：函数的极值点可能是驻点也可能

是不可导的点.</td>
</tr>
<tr>
<td>注记 3：区间 I 上单调函数没有极值

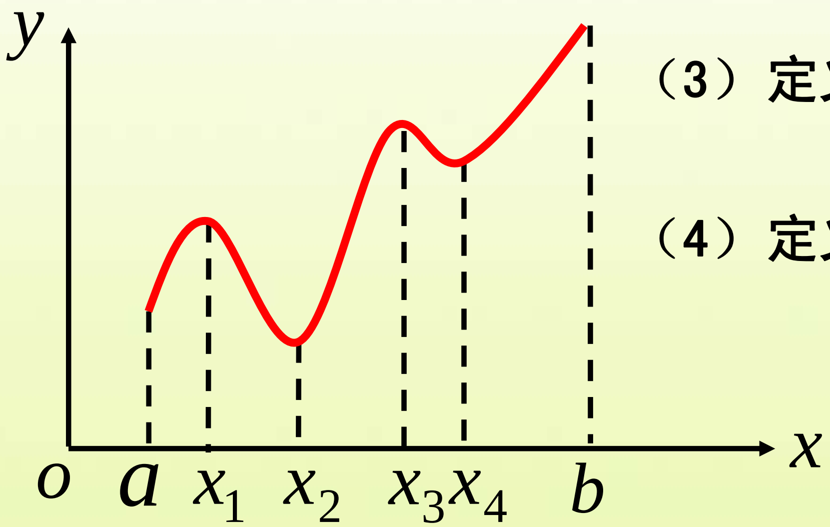
$y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 没有极值.</td>
</tr>
</table>

一、函数的极值

例 1：判断正误

（1）极值点一定在区间内部取得，不能在区间端点取得.

（2）连续函数的极大值点和极小值点可能不唯一

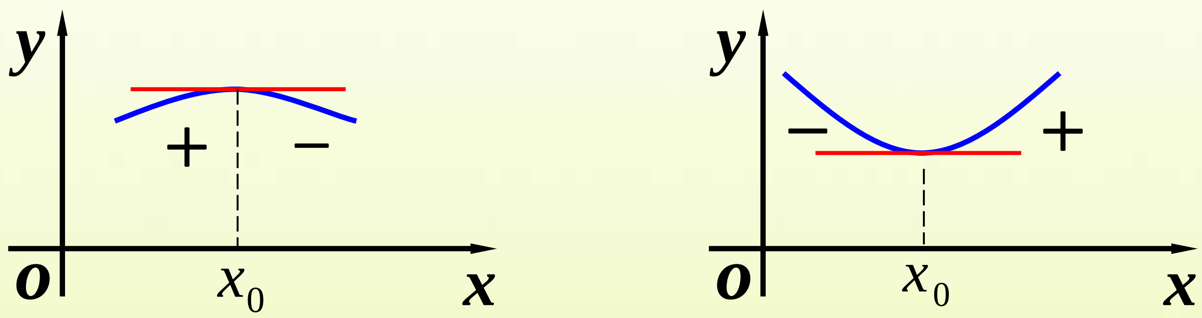


（3）定义域内连续函数的极大值不一定小于极小值

（4）定义域内可导函数一定有极值点.

一、函数的极值

观察图形



极值点情形

一、函数的极值

2 极值的判定

定理 2(充分条件）：设函数 $f(x)$ （1）在点 x_0 及其左右近旁可导（2）$f'(x_0)=0$	
如果在 x_0 某一左邻域内 $f'(x)>0$, 在 x_0 的某一右邻域内 $f'(x)<0$,	如果在 x_0 某一左邻域内 $f'(x)<0$, 在 x_0 的某一右邻域内 $f'(x)>0$,
则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得 极大值 $f(x_0)$	则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得 极小值 $f(x_0)$

口诀：左正右负取极大；左负右正取极小

定理2的证明分析

设 $x \in U(x_0), f'(x_0)=0$ 且

当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$　　当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$

当 $x<x_0$ 时 $f(x)$ 是增函数　　当 $x>x_0$ 时 $f(x)$ 是减函数

当 $x<x_0$ 时 $f(x)<f(x_0)$　　当 $x>x_0$ 时 $f(x)<f(x_0)$

当 $x \in \overset{0}{U}(x_0)$ 时 $f(x)<f(x_0)$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$

在证明过程中没有用到

$f'(x_0)=0$

一、函数的极值

注记 4 ：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁可导，但在不点 x_0 处不可导，那么	
如果在 x_0 某一左邻域内 $f'(x)>0$，在 x_0 的某一右邻域内 $f'(x)<0$，	如果在 x_0 某一左邻域内 $f'(x)<0$，在 x_0 的某一右邻域内 $f'(x)>0$，
则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$	则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$

口诀：左正右负取极大；左负右正取极小

一、函数的极值

注记 5：求 $f(x)$ 在定义域内的极值点和极值的一般步骤

第一步：　确定函数 $f(x)$ 的定义域;

第二步：求函数的导数 $f'(x)$, 并求出 $f(x)$ 的所有驻点及不可导点;

第三步：列表判定函数的导数 $f'(x)$ 在每一个驻点和不可导点左右近旁的符

第四步：利用左正右负取极大；左负右正取极小得到极值点和相应的极值.

例 2 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解（1） 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2） $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ 令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=3$；

(3) 讨论如下表所示:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 10	↘	极小值 -22	↗

（4） 由表可知，函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=10$，在 $x=3$ 处

取得极小值 $f(3)=-22$.

一、函数的极值

例 3　求函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解:（1）函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

（2）当 $x\neq 2$ $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$

当 $x=2$ 时函数不可导

(3) 讨论如下表所示:

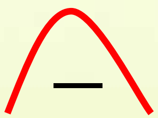
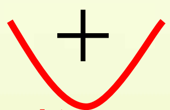
x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−
$f(x)$	↗	极大值 1	↘

（4）由上表可得函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=1$

一、函数的极值

定理 3.（第二种充分条件） 设函数 $f(x)$

（1）在点 x_0 处具有二阶导数　（2）$\boxed{f'(x_0)=0,}$ 则

当 $\boxed{f''(x_0)<0}$ 时	当 $\boxed{f''(x_0)>0}$ 时
函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值	函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值
 即二阶导数小于零的驻点 一定是函数的极大值点	 即二阶导数大于零的驻点 一定是函数的极小值点

注记 6：如果 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,$ 点 x_0 可能是极值点也可能不是极值点.

第二充分条件失效. 此时应用第一充分条件

定理3的证明分析过程

已知 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

由函数极限的局部保号性

当 $x\in \overset{0}{U}(x_0)$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$

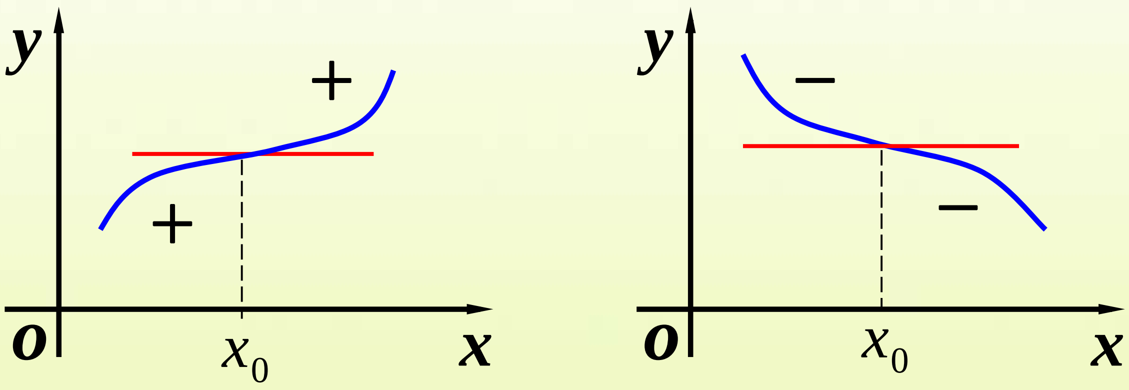
由第一充分条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值

一、函数的极值

注记 7：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点左右近旁的导数同号

则函数在 x_0 点不能取得极值.



(不是极值点情形)

例 4. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 （1） 这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

（2）函数的导数为 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$ 令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=0$；$x_3=1$

（3） $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$

因 $f'(0)=0, f''(0)=6>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

（4）因 $f''(-1)=f''(1)=0$ 用第二充分条件无法使用．利用第一充分条件

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	没有极值	↘	↗	没有极值	↗

由上表可得 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处没有极值

一、函数的极值

例 5：选择题：下列结论正确的是（ ）

（1） 若 $f'(0)=f''(0)-1=0$， 在函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处取得的极小值

（2） 若 $f'(0)=f''(0)+1=0$， 在函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处取得的极大值

（3） 若函数 $y=f(x)$ 二阶可导. 若 $f''(x_0)<0$， 则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值

（4） 若函数 $y=f(x)$ 二阶可导. 若 $f''(x_0)>0$， 则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值

二、函数的最值

闭区间$[a,b]$上连续的函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值

注记 1：闭区间上连续函数的最大值和最小值有可能

在区间的端点及极值点处取得.

注记 2：闭区间上连续函数的最大值和最小值有可能

在区间的端点、驻点及不可导点处取得.

二、函数的最值

例 1：判断正误：

（1）如果闭区间$[a,b]$上连续函数的最值不在区间的端点取得，则必在开区间(a,b)内取得,此时,最值点一定是函数的极值点.

（2） 闭区间上连续函数的最大值一定是函数的所有极值和函数在区间端点的函数值中最大者.

（3） 闭区间上连续函数的最小值一定是函数的所有极值和函数在区间端点的函数值中最小者.

二、函数的最值

注记 3： **求最大值和最小值的步骤**

第一步： 求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导点；

第二步： 求出函数 $f(x)$ 在各驻点、导数不存在的点及区间端点处的函数值

第三步：比较这些函数值，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

二、函数的最值

例 2 求函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值与最小值.

解 （1） $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上的驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$

（2） 计算 $f(-1)=4$，$f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f(3)=20$

（3） 比较可得, 函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得它在 $[-2,3]$ 上的最大值 20,

在 $x=1$ 和 $x=-2$ 处取得它在 $[-2,3]$ 上的最小值 0.

二、函数的最值

注记 4：　求实际问题中最值时的步骤

(1)建立目标函数

(2)求最值

若目标函数只有一个驻点， 则该点一定是最大（小）值点.

二、函数的最值

例 3 有一宽为 a 的正方形铁片，从每个角截取同样的小方块，然后把四边折起来作成一个无盖的方盒. 为了使这个方盒的体积最大，问应该截取多少？

解 设截取的小方块边长为 x，作成一个无盖的方盒的体积为

$$V = x(a-2x)^2 \quad (0 < x < \frac{a}{2})$$

显然 $V' = (a-2x)(a-6x)$，令 $V' = 0$ 得函数在 $(0, \frac{a}{2})$ 内惟一的驻点 $x = \frac{a}{6}$.

由实际情况可知，这个方盒的最大体积一定存在，因此，当水槽高为 $\frac{a}{6}$ 时，方盒的体积最大.

§3.6 函数图形的描绘

主要内容：

一、渐近线：

二、函数图形的描绘

一、函数的渐近线

1. 曲线的水平渐近线和垂直渐近线.

定义 如果 $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = a}$（或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ 或 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$），

那么称直线 $\boxed{y = a}$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线；

如果 $\boxed{\lim_{x\to b} f(x) = \infty}$（或 $\lim_{x\to b^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$），

那么称直线 $\boxed{x = b}$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线.

一、函数的渐近线

例 1. 求曲线 $y=\arctan x$ 的两条水平渐近线

解： 显然：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，

所以直线 $y=\frac{\pi}{2}$ 和 $y=-\frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 的两条水平渐近线；

例 2：求曲线 $y=\ln(x-2)$ 的垂直渐近线

解：由于 $\lim\limits_{x\to2^{+}}\ln(x-2)=\infty$，所以直线 $x=2$ 是曲线 $y=\ln(x-2)$ 的垂直渐进线.

二、函数作图

注记 1：利用导数作函数图像的一般步骤如下：

（1）确定函数的定义域；

（2）研究函数的奇偶性、周期性；

（3）讨论函数的单调性、极值、曲线的凹凸性及拐点，并列表；

（4）确定曲线的水平渐近线和垂直渐近线；

（5）根据作图需要适当选取辅助点；

（6）综合上述讨论，作出函数图像.

例 2　描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形

解（1） 显然函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

（2） 由于 $f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，其图形

关于 y 轴对称. 因此我们只需讨论函数在 $[0,+\infty)$ 上的图形

（3）显然 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$　令 $f''(x)=0$ 得 $x=1$

显然 $x=0$ 和 $x=1$ 将 $[0,+\infty)$ 分为两个区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$

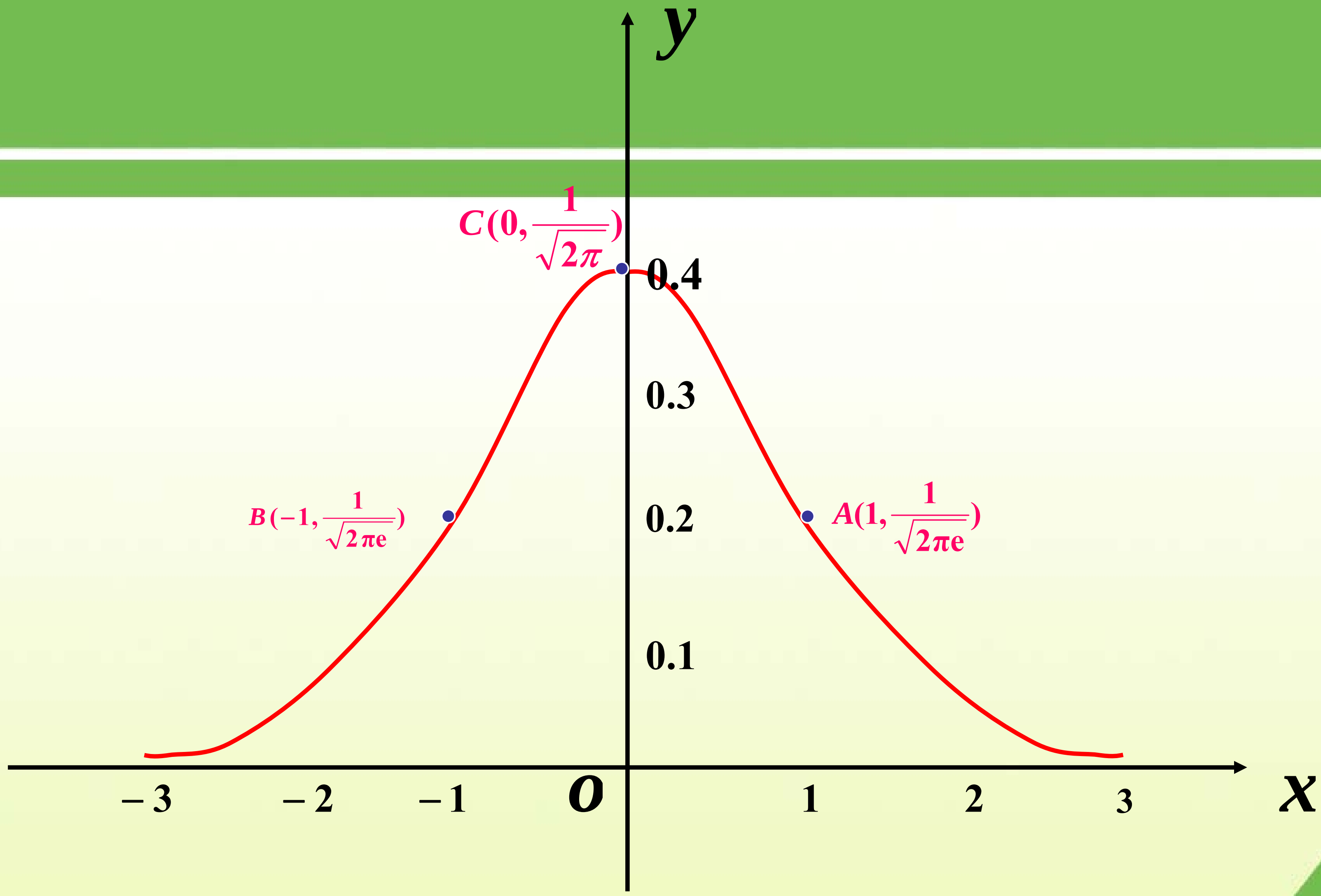
例 2　描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形

解(3)　列表判断曲线的形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$ 的图形	极大值	$\searrow$ $\cap$	拐点 $(1,f(1))$	$\searrow$ $\cup$

(4)　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 所以图形有一条水平渐近线 $y=0$

(5)　显然 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ 所以图形有两点 $C(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 与 $A(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$



y
$C(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$
0.4
0.3
$B(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$
0.2
$A(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$
0.1
–3
–2
–1
O
1
2
3
x

例 3　描绘函数 $f(x)=2+\dfrac{3x}{(1+x)}$ 的形状

解：（1）函数的定义域为 $(-\infty,1)\bigcup(-1,+\infty)$　$x=-1$ 为间断点

（2）当 $x\neq -1$ $f'(x)=\dfrac{3(1-x)}{(1+x)^2}, f''(x)=\dfrac{6(x-2)}{(1+x)^4}$

（3）显然当 $f'(x)=0$ 时，$x=1;$，当 $f''(x)=0$ 时，$x=2$

（4）点 $x=-1, x=1, x=2$ 定义域分为 $(-\infty,-1),(-1,1],[1,2],[2,+\infty)$

（5）列表可得

x	$(-\infty,-1)$	$(-1, 1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↘ ∩	↗ ∩	极大值点	↘ ∩	$(2, f(2))$ 拐点	↘ ∪

（5）由于$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2, \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$，所以函数*有*一条水平渐近线$y=2$和一条垂直渐近线$x=-1$.

（6）显然$f(1)=\frac{11}{4}, f(2)=\frac{8}{3}$,得到图形上的两个点$M_1(1,\frac{11}{4}), M_2(2,\frac{8}{3})$

又$f(0)=2, f(-\frac{1}{2})=-4, f(-4)=\frac{2}{3}$得到图形上的另四个点$M_3(0,2), M_4(-\frac{1}{2},-4)$,

$M_6(-2,-4), M_7(-4,\frac{2}{3})$