第三章 随机变量及其分布

学习目标

理解随机变量的概念、掌握离散型随机变量及概率函数(分布列)的概念和性质、掌握连续型随机变量及概率密度的概念和性质，理解分布函数的概念和性质，会利用概率分布计算有关事件的概率，掌握二项分布、泊松(Poisson)分布、正态分布，了解均匀分布与指数分布，会求简单随机变量函数的概率分布

第一节 随机变量及分布函数

在前面的学习中,我们用字母A、B、C...表示事件,并视之为样本空间Ω的子集;

对等可能概型,主要研究了用排列组合手段计算事件的概率.

本章,将用随机变量表示随机事件,以便采用高等数学的方法描述、研究随机现象.

基本思想

将样本空间数量化, 即用数值来表示试验的结果

有些随机试验的结果可直接用数值来表示.

例如: 在掷骰子试验中,结果可用1,2,3,4,5,6来表示.

有些随机试验的结果不是用数量来表示，但可数量化.

例如: 掷硬币试验,其结果是用汉字“正面”和“反面”来表示的.

可规定: 用1表示 “正面朝上” 用 0表示“反面朝上”.

例　设箱中有10个球，其中有2个红球，8个球；从中任意抽取2个，观察抽球结果.

分析　取球结果为：两个白球；两个红球；一红一白

如果用X表示取得的红球数，则X的取值可为0，1，2.

此时，“两只红球”=“X取到值2”，可记为 $\{X=2\}$

“一红一白”记为 $\{X=1\}$，

“两只白球”记为 $\{X=0\}$

特点：试验结果数量化了，试验结果与数建立了对应关系.

随机变量的定义

设随机试验的样本空间为Ω，如果对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$，均有唯一的实数 $X(\omega)$ 之对应，称 $X=X(\omega)$ 为样本空间Ω上的随机变量.

关于随机变量的注记:

1) 它是一个变量,

2) 它的取值随试验结果而改变,

3）随机变量在某一范围内取值，表示一个随机事件.

例如

某个灯泡的使用寿命X,

X 的可能取值为 $[0,+\infty)$.

某电话总机在一分钟内收到的呼叫次数Y.

Y 的可能取值为 0，1，2，3，....

在[0，1]区间上随机取点，该点的坐标X.

X 的可能取值为 [0，1]上的全体实数.

分布函数的定义

设X为一随机变量,则对任意实数x， (X　x)≤是一个随机事件，称

$$F(x)=P(X\le x)$$

F(x)是一个普通的函数!

为随机变量X的分布函数.

定义域为 （$-\infty$，$+\infty$）;值域为 [0，1].

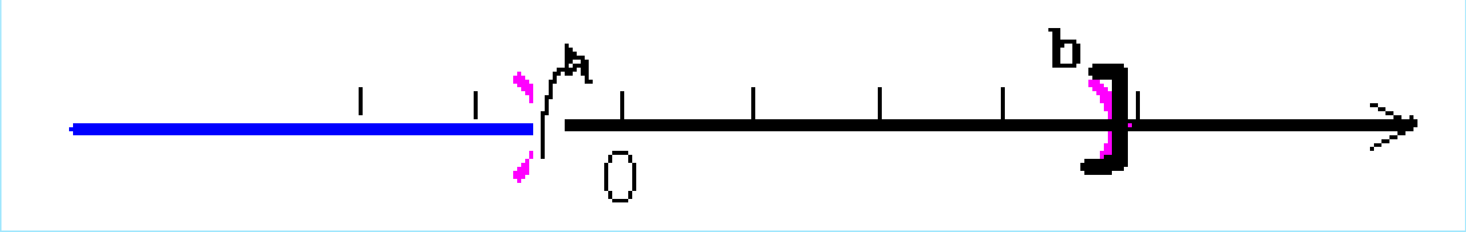
引进分布函数F(x)后，事件的概率都可以用F(x)的函数值来表示.

$$P(X \leqslant b)=F(b)$$

$$P(X>b)=1-P(X \leqslant b)=1-F(b)$$

$$P(a<X \leqslant b)=F(b)-F(a)$$

$$P(a<X \leqslant b)=P(X \leqslant b)-P(X \leqslant a)=F(b)-F(a)$$



分布函数的性质

F(x)是单调不减函数；

若 $x_1 \le x_2$，则$F(x_1) \le F(x_2)$.

F(x)处处左连续，即 $F(x-0)=F(x)$

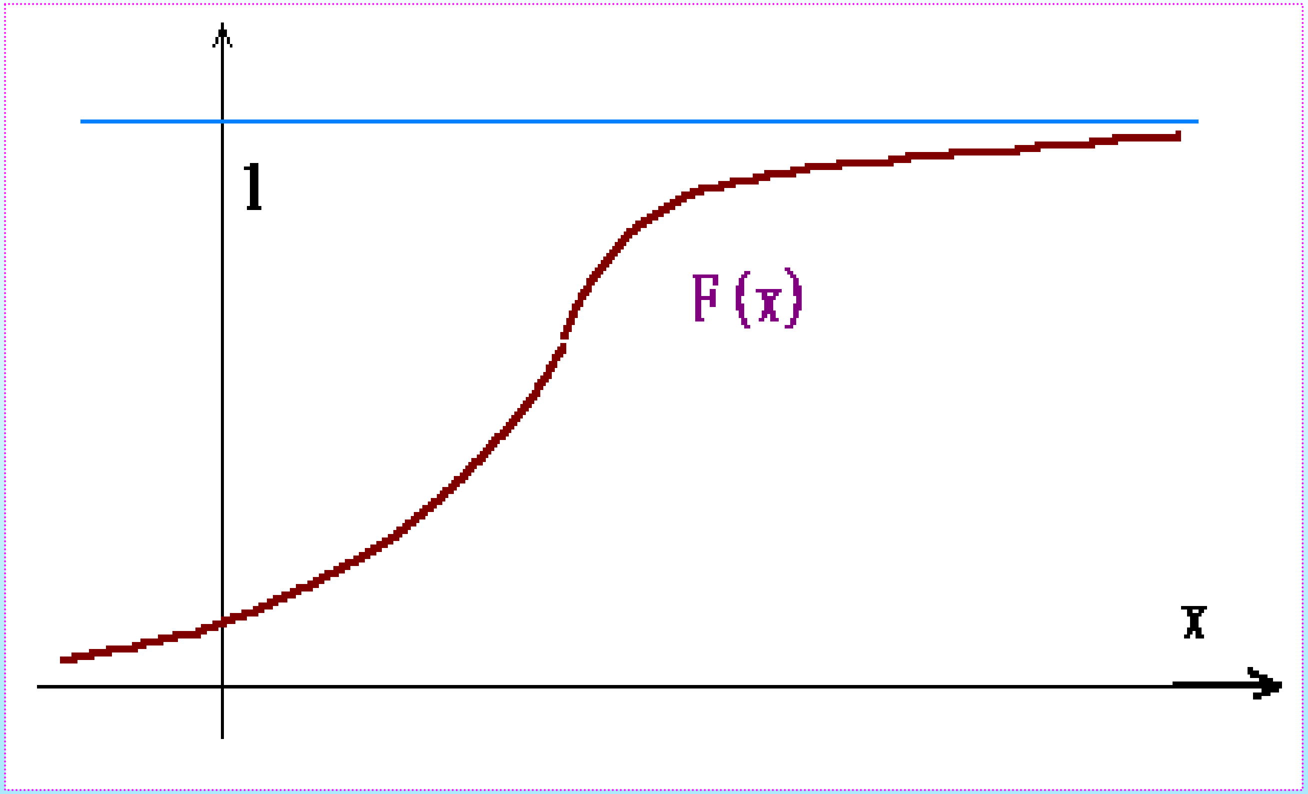
0≤ F(x) ≤1， 且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

$F(-\infty)=P\{X<-\infty\}$ ⟶ 不可能事件

$F(+\infty)=P\{X<+\infty\}$ ⟶ 必然事件

分布函数 F(x)的图形



注记 F(x)是单调不减函数，但是不一定是连续函数.

思考题

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2}$$ 是不是某一随机变量的分布函数？

不是

因为 $$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

而函数 $$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & (x\le 0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$ 可作为分布函数.

随机变量的类型

离散型

随机变量的所有取值是有限个或可数个.

连续型

随即变量的取值有无穷多个，且不可数.

其中连续型随机变量是一种重要类型

第二节 离散型随机变量

设离散型随机变量 X 的所有可能取值是

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ ，而取值 x_k 的概率为 p_k

即

$$\boxed{P\{X = x_k\} = p_k}$$

称此式为X的分布律（列）或概率分布.

其中

$$0 \le p_k \le 1, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

由分布律可以确定概率

例1　设X的分布律为

X	-1	1	2
P	**1/3**	**1/2**	**1/6**

求 $P(0<X\leqslant 2)$

解　$P(0<X\leqslant 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$$=1/2+1/6=2/3$$

例2 设有一批产品20件，其中有3件次品，从中任意抽取2件，如果用X表示取得的次品数，求随机变量X的分布律及事件“至少抽得一件次品”的概率.

解 X的可能取值为 0，1，2

$$P(X=0)=\frac{C_{17}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{136}{190}$$ =P{抽得的两件全为正品}

$$P(X=1)=\frac{C_{3}^{1}C_{17}^{1}}{C_{20}^{2}}=\frac{51}{190}$$ =P{只有一件为次品}

$$P(X=2)=\frac{C_{3}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{3}{190}$$ =P{抽得的两件全为次品}

故 X的分布律为

X	0	1	2
p_k	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

而“至少抽得一件次品”$=\{X\geqslant 1\} = \{X=1\}\cup\{X=2\}$

注意：$\{X=1\}$与$\{X=2\}$是互不相容的！

故 $P(X\geqslant 1)= P(X=1)+P(X=2) = \frac{51}{190}+\frac{3}{190}=\frac{54}{190}=\frac{27}{95}$

实际上，这仍是古典概型的计算题，只是表达事件的方式改变了.

例3 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=b\left(\frac{2}{3}\right)^k, k=1,2,3,\cdots$$

试确定常数b的值.

解 由分布律的性质,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}b\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{b\,\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=b\frac{2/3}{1/3}=2b=1 \longrightarrow b=\frac{1}{2}.$$

常见的离散型分布

0-1分布(二点分布)

定义： 若随机变量X的分布律为：

X	0	1
P	$1-p$	p

则称X服从参数为p 的二点分布或(0-1)分布，

注记 样本空间只有两个样本点的情况都可以用两点分布来 描述.如：上抛一枚硬币，观察出现的面.

例1 设一个袋中装有3个红球和7个白球，现在从中随机抽取一球，如果每个球抽取的机会相等，并且用数“1”代表取得红球，“0”代表取得白球，则随机抽取一球所得的值是一个离散型随机变量

$$X=\begin{cases}1 & \text{（取得红球）}\\ 0 & \text{（取得白球）}\end{cases}$$

其概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{3}{10}$ $P(X=0)=\dfrac{7}{10}$

即X服从两点分布.

二项分布

定义 在n重贝努利试验中, 若以X表示事件A发生的次数,

则X可能的取值为0, 1, 2, 3, ⋯, n.

随机变量X的分布律

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots, n,$$

其中0< p <1, 则称X服从参数为 n, p 的二项分布, 记为

$$X \sim B(n, p)$$

例2 从一批由9件正品、3件次品组成的产品中, 有放回地抽取5次, 每次抽一件, 求恰好抽到两次次品的概率.

解 有放回地抽取5件, 可视为5重Bernoulli实验

A="一次实验中抽到次品", P(A)=3/12,

n=5 p=1/4

记X为共抽到的次品数, 则 $X \sim B(5, \frac{1}{4})$

$$P(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-2}=\frac{135}{512}$$

例3 一大批种子发芽率为90%，今从中任取10粒.求播种后，求（1）恰有8粒发芽的概率；（2）不小于8粒发芽的概率.

解 X～B（10，0.9）

$$(1)P(X=8)=C_{10}^{8}0.9^{8}\times 0.1^{2}\approx 0.1937$$

$$(2)P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$=C_{10}^{8}0.9^{8}\times 0.1^{2}+C_{10}^{9}0.9^{9}\times 0.1+C_{10}^{10}0.9^{10}$$

$$\approx 0.9298$$

泊松分布

定义 若随机变量 X 的分布律为:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2\dots$$

其中$\lambda>0$，则称X服从参数为λ的泊松分布，记为

$$X\sim P(\lambda)$$

例4　已知某电话交换台每分钟接到的呼唤次数X服从

$\lambda = 4$ 的泊松分布，分别 求（1）每分钟内恰好接到3次呼唤的概率；（2）每分钟不超过4次的概率

解

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$$

$\lambda = 4, k = 3$

$$P(X=3)=\frac{4^3}{3!}e^{-4}=0.19563$$

$$P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=0.628838$$

二项分布的泊松近似

泊松定理

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda = np$$

实际应用中：当n较大, p较小，np适中时，即可用泊松公式近似替换二项概率公式.

例5 若某人做某事的成功率为1%，他重复努力400次，则至少成功一次的概率为

解 $$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\}$$

$$= 1 - 0.99^{400} \approx 0.9820$$

成功次数服从二项概率 $B(400, 0.01)$

注记 通过此题可以看出如果有百分之一的希望，我们就要做出百分之百的努力.

第三节　连续型随机变量

定义　设X为一随机变量，若存在非负实函数 $f(x)$，使对任意实数 x ，其分布函数可以表示为

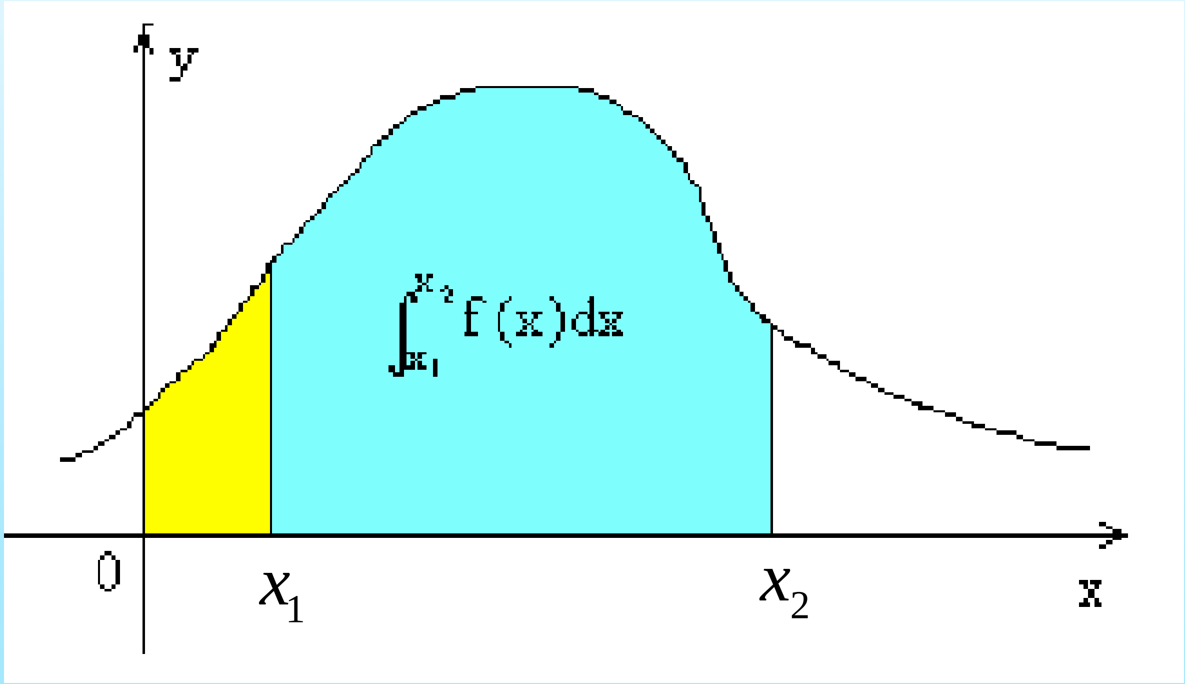
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称X为连续型随机变量，$f(x)$ 称为X 的概率密度函数，简称密度函数.

由上述定义易得

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$x_1 \le x_2$$



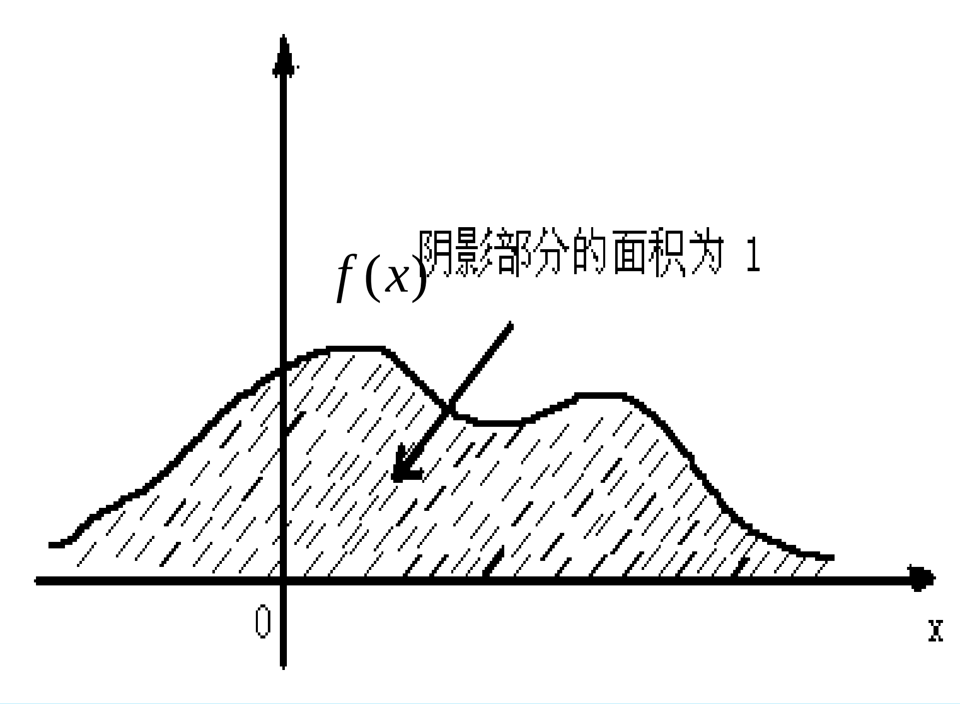
概率密度函数的性质

非负性

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

规范性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



$$P\{-\infty < x < +\infty\} = 1$$

密度函数和分布函数之间的关系

积分关系

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

$$F(x)=P\{X\le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

导数关系

若$f(x)$在x处连续，则$F'(x)=f(x)$

连续型随机变量的分布函数的性质

由连续型随机变量的定义可知，其分布函数在实数域内处处连续.

因此，若a为任意实数，则有 $P(X=a)=0$

从而有

$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b)$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

即X取值在某区间的概率等于密度函数在此区间上的定积分.

例1　假设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x & |x|\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 $P(0\le X\le \frac{\pi}{4})$

解　Step1：利用密度函数的性质求出 a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx=1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}$$

Step2：　密度函数在区间的积分得到此区间的概率

$$P(0\le X\le \frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

例2　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

(1) 求 $P(0.3<X<0.7)$

(2) X 的密度函数

解

(1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

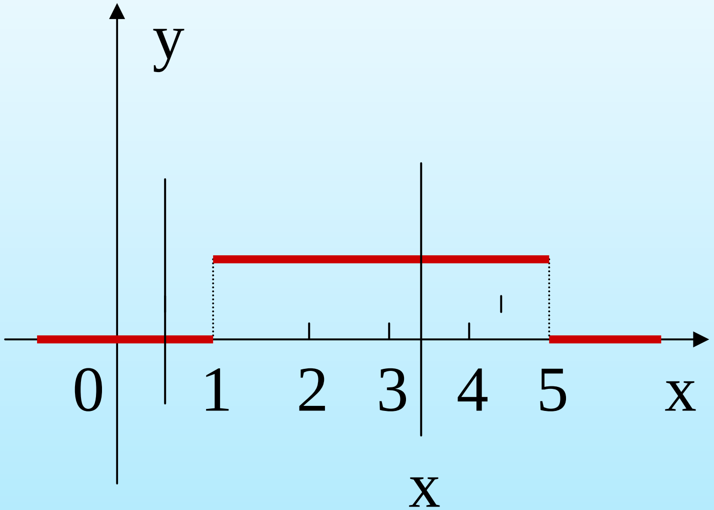
(2) 密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & ,0<x<1\\ 0 & ，\text{其他}\end{cases}$$

例3　已知连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & x\in(1,5)\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 X 的分布函数.



解　当 $x\le 1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=0$$

当$1<x<5$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{x}f(x)dx$

$$=0+\int_{1}^{x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(x-1)$$

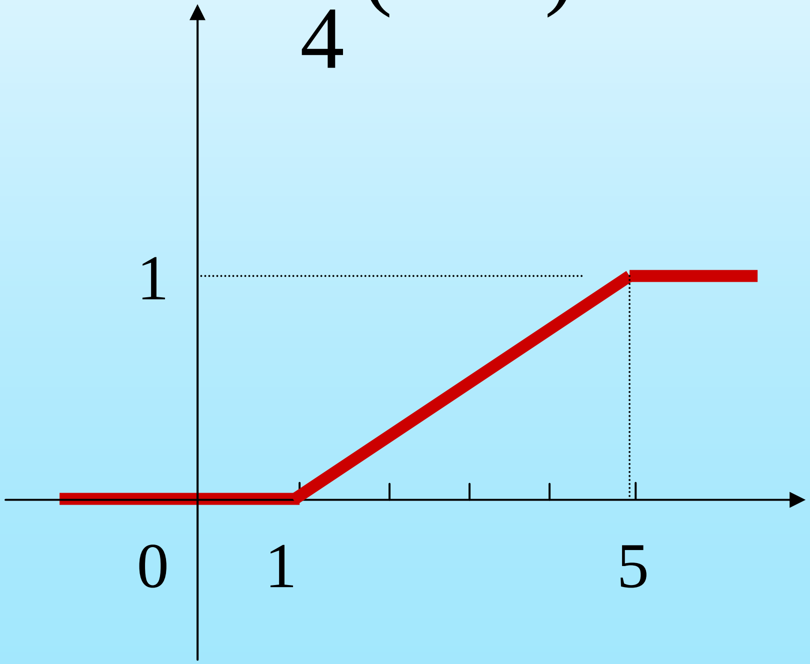
当 $x \geq 5$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=$

$$=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{x} f(x)dx$$

$$=0+\int_{1}^{5}\frac{1}{4}dx+0=\frac{1}{4}(5-1)=1$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\leq 1\\ \dfrac{1}{4}(x-1)\ ,\ 1<x<5\\ 1\ ,x\geq 5\end{cases}$$



练一练

已知连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x) = Ae^{-|x|}$$

(1) 求 $P(-1 < X < 1)$ （2） 求 X 的分布函数.

练一练

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x\le 0\\ \frac{1}{2} & 0<x\le 1\\ 1-\frac{1}{2}e^{-(x-1)} & x>1\end{cases}$$

(1) 求 $P(-1<X<2)$　　(2) 求X 的密度函数

常见分布

均匀分布 若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

称X在区间（a，b）上服从均匀分布，记为 X ~ R (a, b)

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$$

例4 102电车每5分钟发一班，在任一时刻 某一乘客到了车站. 求乘客候车时间不超过2分钟的概率.

解 设随机变量X为候车时间，则X服从（0，5）上的均匀分布，即

X～R（0，5）

$$P(X \le 2) = F(2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5}$$

例5　设ξ在[-1，5]上服从均匀分布，求方程

$$x^2+2\xi x+1=0$$

有实根的概率.

解　方程有实数根 $\Longleftrightarrow$ $4\xi^2-4\geq 0$

即　$|\xi|\geq 1$

而　ξ 的密度函数为　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (-1\leq x\leq 5)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

所求概率为　$P\{|\xi|\geq 1\}=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\dfrac{2}{3}$

指数分布 若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\quad(\lambda>0\text{为常数})$$

则称X服从参数为 λ 的指数分布.

$$X \sim E(\lambda)$$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

例6　设X服从参数为3的指数分布，求它的密度函数

及 $P(X\geq 1)$ 和 $P(-1<X\leq 2)$

解　X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3\ e^{-3x}, & x>0\\ 0\ , & x\leq 0\end{cases}$$

$$P(X\geq 1)=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}3e^{-3x}dx=e^{-3}$$

$$P(-1<X\leq 2)=\int_0^2 3e^{-3x}dx=1-e^{-6}$$

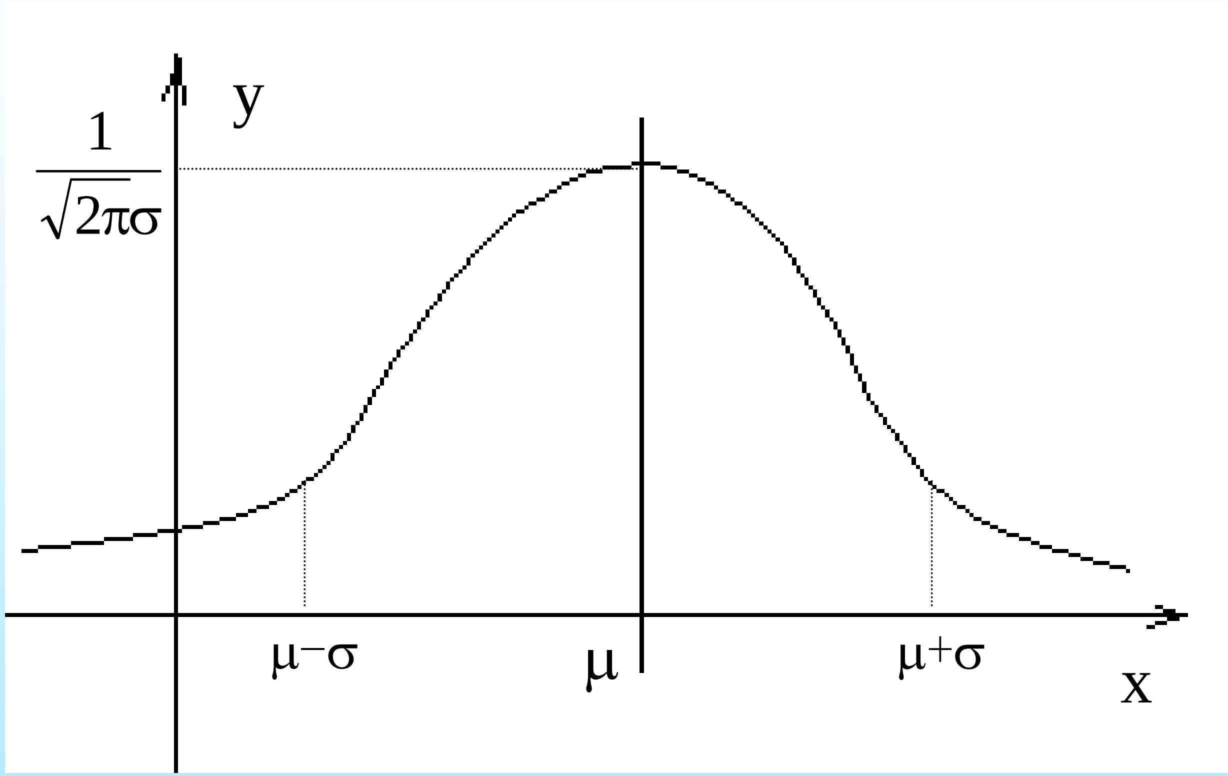
正态分布　若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad \mu,\sigma(>0)\text{为常数}$$

则称X服从参数为 μ,σ^2 正态分布,记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

正态分布的密度函数的性质与图形



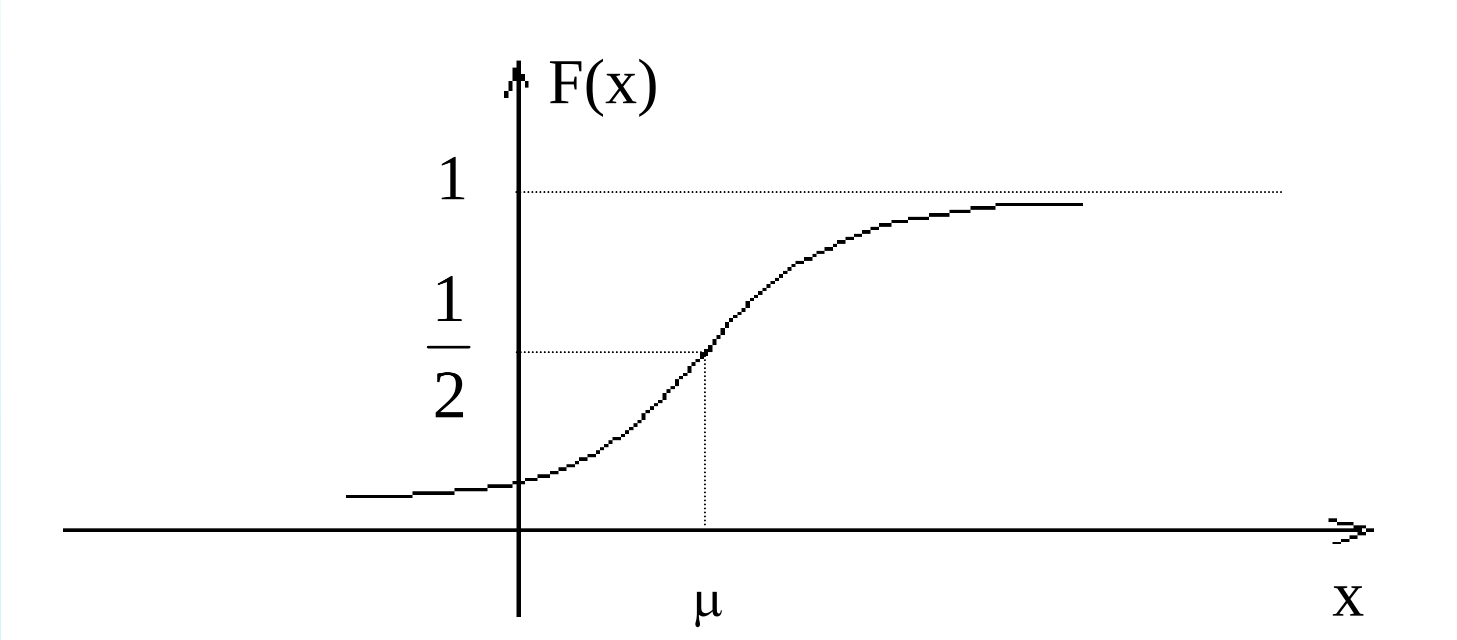
对称性　关于 $x=\mu$ 对称

单调性　$(-\infty, \mu)$ 升，$(\mu, +\infty)$ 降

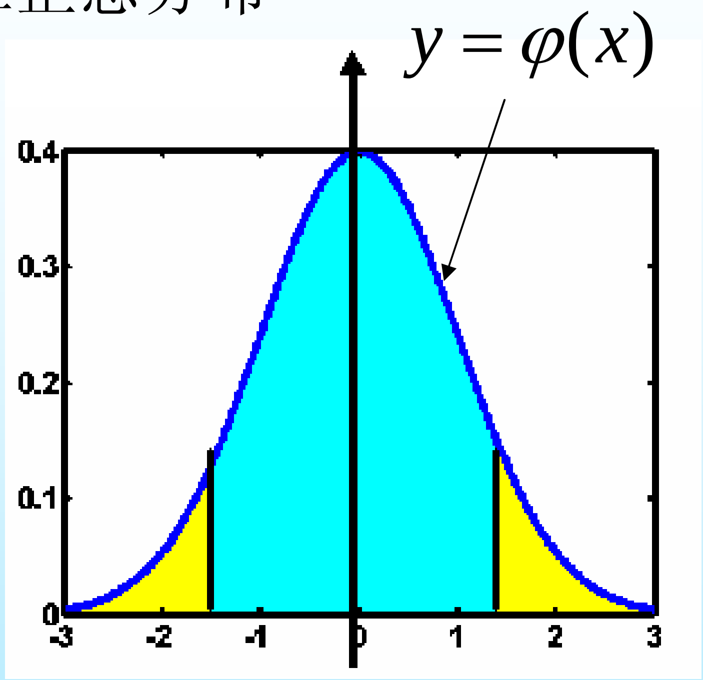
拐点　$\left(\mu\pm\sigma, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}}\right)$;　$f_{最大}(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

正态分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$



X ~ N（0，1）分布称为标准正态分布



密度函数

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\mu=0 \quad \sigma=1$$

分布函数

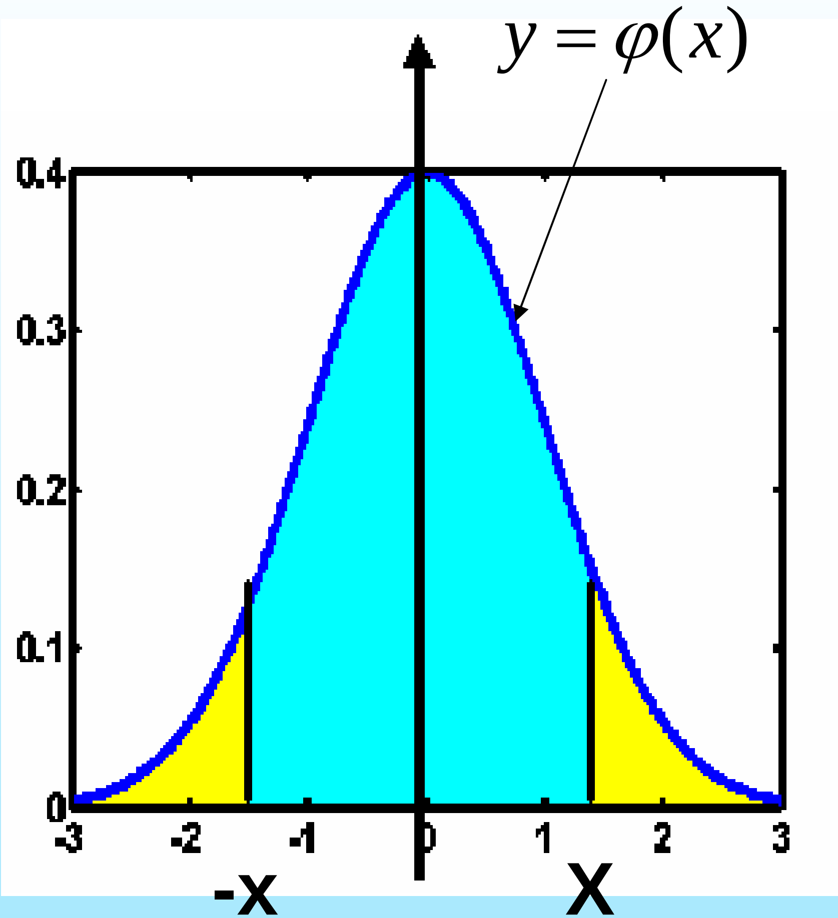
$$\Phi(x) = P\{X \le x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

$$\downarrow$$

$$\Phi(0) = 0.5$$



公式

$$P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P(X \le b) = \Phi(b) \qquad P(X \ge a) = 1 - \Phi(a)$$

查表　　$x \ge 0$时，$\Phi(x)$的值可以查表

$x < 0$时，$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

例　　$X \sim N(0,1)$

$$P(1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

$$P(X \le -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(|X| \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

定理

如果 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

概率计算

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\boxed{P(a \le X \le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

查标准正态分布表

$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 　$\Phi(x)$为标准正态分布函数

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例7 设X~N（1，4），求 P(0<X<1.6)

解

$$\mu = 1,\ \sigma = 2$$

$$P(0 < X < 1.6) = \Phi(\frac{1.6-1}{2}) - \Phi(\frac{0-1}{2})$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$$

$$= 0.6179 - 1 + 0.6915 = 0.3094$$

$$P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

例8　某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报名，假设报名者的考试成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

已知90分以上的12人，60分以下的83人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为78分，问此人能否被录取？

分析

首先求出 μ 和 σ

然后根据录取率或者分数线确定能否录取

解 成绩X服从 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$P\{X>90\}=\frac{12}{526}\approx 0.0228 \qquad P\{X<60\}=\frac{83}{526}\approx 0.1588$$

录取率为 $\dfrac{155}{526}\approx 0.2947$

可得 $$P\{X\le 90\}=1-\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)\approx 1-0.0228=0.9772$$

$$P\{X<60\}=\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)\approx 0.1588$$

得 $$\Phi\left(\frac{\mu-60}{\sigma}\right)\approx 1-0.1588=0.8412$$

查表得 $$\frac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0 \qquad \frac{\mu-60}{\sigma}\approx 1.0$$

解　查表得 $\dfrac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0$　$\dfrac{\mu-60}{\sigma}\approx 1.0$

解得　$\mu=70$，　$\sigma=10$

故　$X\sim N\left(70,10^2\right)$

设录取的最低分为　x

则应有　$P\left\{X\geq x\right\}=0.2947$

$$P\left\{X<x\right\}\approx 1-0.2947=0.7053$$

$$\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=0.7053\qquad \frac{x-70}{10}\approx 0.54$$

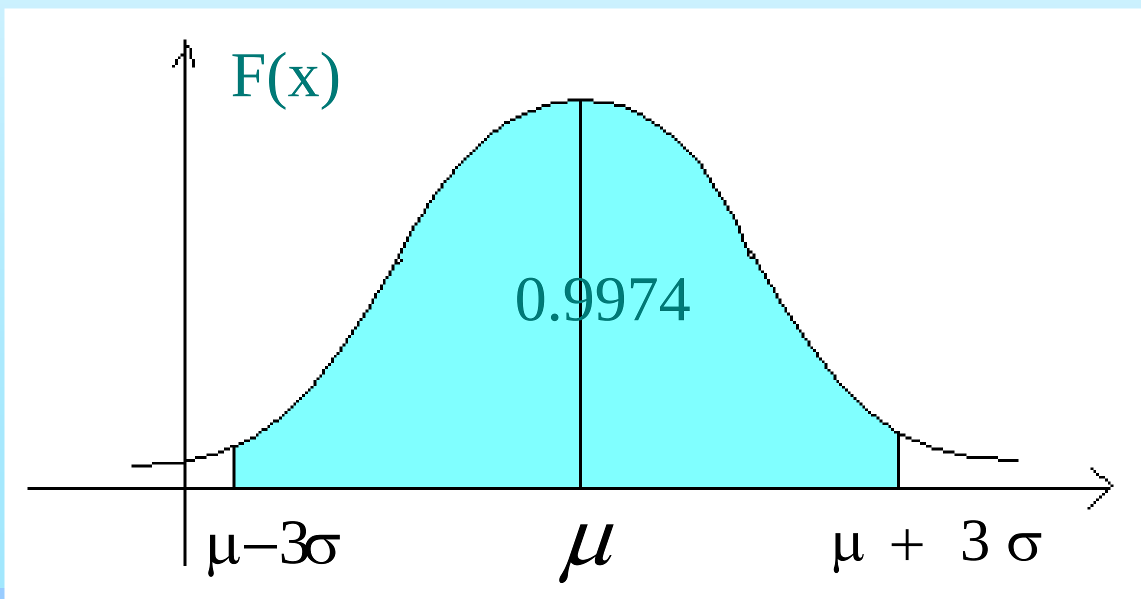
$$x=75.4$$

某人78分，可被录取.

推广 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，X的取值几乎都落入以μ为中心，以3σ为半径的区间内. 这是因为：

$$P\{\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\} = \Phi(3)-\Phi(-3)$$

$$=\Phi(3)-[1-\Phi(3)] = 2\Phi(3)-1 = 0.9974$$



$$\{|X-\mu|>3\sigma\}$$

是小概率事件

第四节 一维随机变量的函数及其分布

若X为离散型随机变量, 其分布律为

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots\cdots$	x_n	$\cdots$
概率	p_1	p_2	p_3	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots$

则随机变量X的函数 Y= g (X) 的分布律可表示为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$\cdots\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
概率	p_1	p_2	p_3	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots$

如果$g(x_i)$与$g(x_j)$相同，此时应将两项合并，即对应概率相加.

例1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.4	0.1

求$Y=2X^2+1$的分布律.

解 由题设可得如下表格

x	-1	0	1	2
$Y=2x^2+1$	3	1	3	9
概率	0.2	0.3	0.4	0.1

所以,
$y=2x^2+1$的分布律为

y	1	3	9
p_k	0.3	0.6	0.1

设 X 为一个连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$.$y = g(x)$为一个已知连续函数，求随机变量Y=g(X)的概率密度函数.

解题方法

(1) 求Y的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) \xlongequal{\text{根据分布函数的定义}} P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$= P(X \in \{x | g(x) \le y\})$$

(2) 对$F_Y(y)$ 求导，得到 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

例2 设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, 0<x<4\\ 0, 其它\end{cases}$$

求随机变量Y=2X+8的概率密度.

解（1） 先求Y=2X+8的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(2X+8\le y\right)$$

$$=P(X\le\frac{y-8}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}}f(x)dx$$

（2） 求Y=2X+8的概率密度

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例3 设随机变量X服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

求 $Y=aX+b$ 的概率密度.

解 先求分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)$$

当 $a>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(X\le \frac{y-b}{a})=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

所以，

$$f_Y(y)=f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

当 $a<0$ 时， $F_Y(y)=P(X\geq\frac{y-b}{a})$

$$F_Y(y)=P(X\geq\frac{y-b}{a})=1-P(X\leq\frac{y-b}{a})$$

$$=1-F_X(\frac{y-b}{a})$$

$$f_Y(y)=-f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

所以， $Y\sim N\left(a\mu+b,(|a|\sigma)^2\right)$

结论　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$Y = aX + b(a \neq 0)$,

则 $Y \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

由此得到，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $\dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

例4 设X～N（0，1），其概率密度为：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

则 $Y=X^2$ 概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

定理　若随机变量X和随机变量Y=g(X)的密度函数分别为 $f_X(x)$ $f_Y(y)$, 当 g(x) 是严格单调函数，则

$$f_Y(y) = f_X[(G(y))]\left|G'(y)\right|$$

其中 $x = G(y)$ 为 $y = g(x)$ 的反函数

练习　设圆的半径X服从区间(1, 2)上的均匀分布，求圆面积的分布密度函数.

答案:
$$f_S(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}}, & \pi<y<4\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$