线性代数

高景利
南阳师范学院数学与统计学院

目　录

- **1**．理解矩阵的概念.
- **2**．掌握矩阵的运算以及它们的运算规律.
- **3**．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.
- **4**. 了解分块矩阵及其运算.

- 1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.
- 2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.
- 3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.
- 4．了解分块矩阵及其运算.

第一节 矩阵

一、矩阵的定义

定义 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵.

为表示它是一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这$m\times n$ 个数称为矩阵 A 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 A 的 (i,j)元， 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵可简记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，$m\times n$ 矩阵 A 也记作 $A_{m\times n}$.

元素全为实数的矩阵称为实矩阵，元素全是复数的矩阵称为复矩阵.（本书中的矩阵除特别说明者外，都指实矩阵）

2. 特殊矩阵

(1) 行矩阵（行向量）$m=1$

$$\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$$

(2) 列矩阵（列向量）$n=1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(3) **方阵** $m=n$ 记 $A=(a_{ij})_n$ 或 A_n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(4) **上(下)三角矩阵** $a_{ij}=0$ ($i>j$) ($i<j$)的方阵.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(5) **对角矩阵** $a_{ij}=0\ (i\neq j)$ 的方阵.

(6) **数量矩阵** $a_{ii}=\lambda\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的对角矩阵

(7) **单位矩阵** $\lambda=1$ 的数量矩阵 记 I_n 或 E_n

(8) **零矩阵** 所有元素都是零的矩阵. 记 $O_{m\times n}$ 或 O

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

（9）矩阵相等 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

若 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A=B$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 矩阵的应用

例1 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 i 个商店发送第 j 种产品的数量.

例2 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 c_{ij} 为常数.

线性变换（1）的系数 c_{ij} 构成矩阵 $C = (c_{ij})_{m\times n}$

例3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数 a_{ij} 构成方阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

第二节　矩阵运算及法则

1. 加减法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$

定义 $\boldsymbol{A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}}$，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意：非同型矩阵不能相加.

运算规律:

交换律　$A+B=B+A$

结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$

其他　$A+O=A$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

2. **数乘**　定义数 k 与 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积为

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

记作 kA，即 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

运算法则：

数对矩阵的分配律　$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

矩阵对数的分配律　$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

结合律　$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

其他　$0\cdot A=O$

例1　设

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 7\\ 5 & 4 & -3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & -4\\ 5 & 1 & 9\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

且 $A+2X=B$, 求矩阵 X .

(3) **乘法**　$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times l}$　$B=\left(b_{ij}\right)_{l\times n}$

定义　$AB=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

两个矩阵相乘可以直观地表示如下:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{il} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{l1} & \cdots & b_{lj} & \cdots & b_{ln}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn}
\end{pmatrix}
$$

注意：行乘列原则，左边矩阵的列数=右边矩阵的行数

例2　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

的乘积 AB

例3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

求 AB 和 BA

注意： 以下结论一般情况下<u>不成立</u>

$$AB = BA$$

如果AB=BA，则称A与B可交换.

$$AB = O \Rightarrow A = O \quad \text{或} \quad B = O$$

$$AB = AC \quad \text{且} \quad A \neq O \Rightarrow B = C$$

由此可见，矩阵的乘法有别于数的乘法，许多因式分解公式都可能不成立. 比如：

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm 2AB$$

运算规律：

分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

结合律

$$(AB)C=A(BC)$$

数乘结合律

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$$

其他

$$I_m A_{m\times n}=A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}$$

由此可见，单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数1.

矩阵

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

称为纯量矩阵（或数量矩阵）

由 $(\lambda E)A = \lambda A$ ，$A(\lambda E) = \lambda A$ ，可知纯量矩阵 λE 与矩阵 A 的乘积等于数 λ 与 A 的乘积，并且当 A 为 n 阶方阵时，有

$$(\lambda E_n)A_n = \lambda A = A_n(\lambda E_n)$$

表明**纯量矩阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的**.

(4) **方阵的幂**　$A=\left(a_{ij}\right)_n$　k 为自然数

则　$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k}$　规定　$A^0=E\ \left(A\neq O\right)$

运算规律:

$$A^{k+l}=A^kA^l \qquad (A^k)^l=A^{kl}$$

注意:　一般来说　$\left(AB\right)^k\neq A^kB^k$

如果　$A^2=A$　则称 A 为**幂等矩阵**.

如果　$A^k=O$（k自然数）　则称 A 为**幂零矩阵**.

(5) **转置**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为 A 的**转置矩阵**.

运算规律:

$$(A^T)^T=A \qquad (A\pm B)^T=A^T\pm B^T$$

$$(kA)^T=kA^T \qquad (AB)^T=B^TA^T \qquad (A^k)^T=(A^T)^k$$

对称矩阵： $A^T = A$

反对称矩阵： $A^T = -A$

注： 对称矩阵的元素关于其主对角线对称.

反对称矩阵的主对角线元素都为零.

性质： $A^T + A$　$A^T A$　$A A^T$ 为对称矩阵.

$A^T - A$　为反对称矩阵.

如果 A, B 是同阶对称(或反对称)矩阵, k 是常数, 则 $A \pm B$, kA, A^T 一定是对称(或反对称)矩阵, 但 AB 不一定是对称(或反对称)矩阵.

例4　设 A、B是对称矩阵，则 AB（或 BA）也是对称矩阵的充分必要条件 $AB = BA$.

例5　设列矩阵 $X=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$ 满足 $X^T X = 1$，E 为 n阶单位阵，$H = E - 2XX^T$，证明 H是对称矩阵，且 $HH^T = E$

(6) **方阵的行列式**　$A=\left(a_{ij}\right)_n$

称 $\left|A\right|=\left|a_{ij}\right|_n$ 为 A 的行列式, 又记 det A

运算规律:

$$\left|A^T\right|=\left|A\right| \qquad \left|kA\right|_n=k^n\left|A\right|$$

$$\left|AB\right|=\left|A\right|\left|B\right| \qquad \left|A^k\right|=\left|A\right|^k$$

第三节　逆矩阵

1.定义及唯一性

定义　设A 是一个n 阶方阵，E 是一个n阶单位阵，如果存在一个n阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E$$

则称 A 可逆，又称 A为非奇异矩阵, 并称 B为 A的逆矩阵. 否则称 A不可逆，又称 A为奇异矩阵.

定理　若方阵 A可逆, 则 A的逆矩阵唯一；

A 的逆矩阵记为 A^{-1}.

怎么找？

2.判定及求法

方法一：利用定义判定.即找到矩阵B，使得AB=E（或者BA=E）.

第一种：题目中已经给出了“B”，只需判断哪个是“B”，然后验证AB=E（或者BA=E）.比如P56，21.

第二种：根据已知条件“凑”矩阵B使得AB=E（或者BA=E）.比如P56，22.

例1 设n阶方阵A满足 $A^3-3A+E=0$ ，试证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆.

方法二：利用P43定理2判定

设 $A=\left(a_{ij}\right)_n$ 称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的**伴随矩阵**. 其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

重要恒等式: $AA^*=A^*A=|A|E$

定理2 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

例2 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

因为 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1\times2\times3 + 2\times1\times3 + 3\times2\times4$

$-3\times2\times3 - 2\times2\times3 - 1\times1\times4$

$= 2$

所以，A是可逆的.

又因为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2 \qquad M_{21}=\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=-6 \qquad M_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=3 \qquad M_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6 \qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-5$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2 \qquad M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2$$

所以，

$$A^{*}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

从而，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

3.性质

(1) 若方阵 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) 若方阵 A 可逆, 且数 $k\neq 0$, 则 kA 也可逆, 且

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$$

(3) 若方阵 A 可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(4) 若方阵 A 可逆，则 A^k 也可逆，且 $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

(5) 若两个同阶方阵 A,B 可逆，则 AB 也可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(6) 若方阵 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

4.应用

含有n个未知量n个方程的线性方程组一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

则线性方程组（I）可简化

$$Ax=b$$

若 $|A|\neq 0$，则 A^{-1} 存在，

让上述等式两边同时左乘 A^{-1}，可得

$$x=A^{-1}b$$

伴随矩阵性质:

$$(kA)^* = k^{n-1}A^* \qquad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^k)^* = (A^*)^k \qquad (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$|A^*| = |A|^{n-1} \qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

如果 A 可逆,则 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

第四节　分块矩阵

1. 矩阵分块　在矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 的行间和列间分别用一些水平线和铅直线将它分割成若干个小矩阵 A_{ij}，每一个小矩阵 A_{ij} 称为 A 的**子块**或**子矩阵**，这种以子块或子矩阵 A_{ij} 为元素的矩阵称为**分块矩阵**．记作 $A=\left(A_{ij}\right)_{r\times s}$

2. 运算　只要对矩阵按适当的方式分块, 那么在对分块矩阵进行运算时, 就可以将子块当作一般矩阵中的元素来看待, 并按一般矩阵的运算规则进行, 然后子块之间的运算再按一般矩阵的运算规则进行.

例9 矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 3\end{array}\right)\qquad B=\left(\begin{array}{c:cc}-3 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

求 AB

例10 设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times s}$，$B=(b_{kj})_{s\times n}$，若将矩阵按列分块为 $B=(B_1\quad B_2\quad \cdots\quad B_n)$

求 AB

3. 分块矩阵求逆法

(1) $$M=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$ 其中 A，B 可逆

则 $$M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$ 其中 A，B 可逆

则 $$M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(3) $$M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$ 其中 A，B 可逆

则 $$M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

(4)

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$ 则 $$M^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_k^{-1} \end{pmatrix}$$

例11 $H=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0\\-1&3&1&-1&5\\2&0&0&4&3\\1&0&1&0&6\end{pmatrix}$ 求 H^{-1}

例12 设$H=\begin{pmatrix}3&2&0&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1&2&0&0\\0&0&0&3&-2&5&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&5\\0&0&0&0&0&0&3&6\end{pmatrix}$ 求 H^{-1}

问题讨论

- 1.矩阵与行列式的区别与联系？
- 2.矩阵乘法运算的运算规律？
- 3.矩阵乘法中单位矩阵E的性质和作用？
- 4.分块矩阵的运算与一般矩阵的运算的联系与联系？