第十一章反常积分

11.1 反常积分概念

一、引例

二、无穷限的广义积分

三、无界函数的广义积分

四、小结

一、引例

在讨论定积分时有两个最基本的条件：积分区间的有穷性；被积函数的有界性.

但以下例子告诉我们有时我们需要考虑无穷区间上的“积分”或无界函数的“积分”.

例1（第二宇宙速度问题）在地球表面垂直发射火箭，要使火箭克服地球引力无限远离地球，试问初速度 v_0 至少要多大？

前页 后页 返回

解 设地球半径为 R, 火箭质量为 m, 地面上的重力加速度为 g, 按万有引力定理, 在距地心 $x(\geq R)$ 处火箭所受的引力为

$$F = \frac{mgR^2}{x^2},$$

$$\int_R^r \frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

当 $r\to+\infty$ 时, 其极限 mgR 就是火箭无限远离地球需作的功. 于是自然把这一极限写作上限为 $+\infty$ 的积分

$$\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{r\to+\infty}\int_R^r\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR.$$

由机械能守恒定律可求初速度 v_0 至少应使

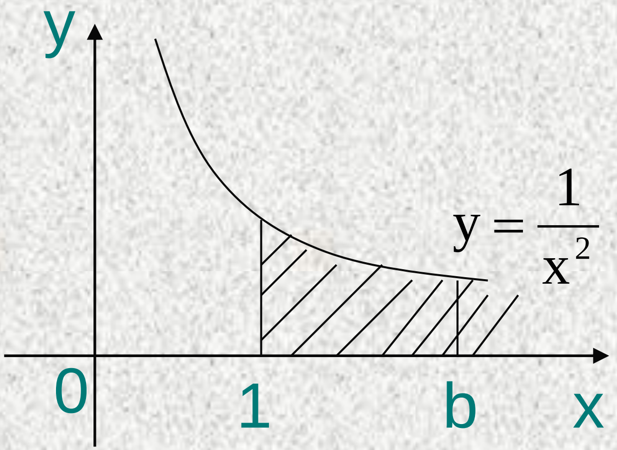
$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR.$$

用 $g=9.81(\mathrm{m/s^2})$, $R=6.371\times10^6$ (m) 代入, 得

$$v_0=\sqrt{2gR}\approx 11.2\ (\mathrm{km/s}).$$

前页 后页 返回

例2： 求曲线$y=\dfrac{1}{x^2}$，x轴及直线$x=1$，右边所围成的“开口曲边梯形”的面积。



解： 由于这个图形不是封闭的曲边梯形,而在x轴的正方向是开口的，即这是的积分区间为[1，∞），

故$\forall b>1$，则A的面积为$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=[-\frac{1}{x}]_1^b=1-\frac{1}{b}$

显然当b改变时，曲边梯形的面积也随之改变，

故$b\to+\infty$时，即$\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}(1-\frac{1}{b})=1$

则所求曲边梯形的面积为1

二、无穷限的广义积分.

定义1: 设函数 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续, 取$b>a$,

如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在,

则称此极限为函数 $f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上

的广义积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

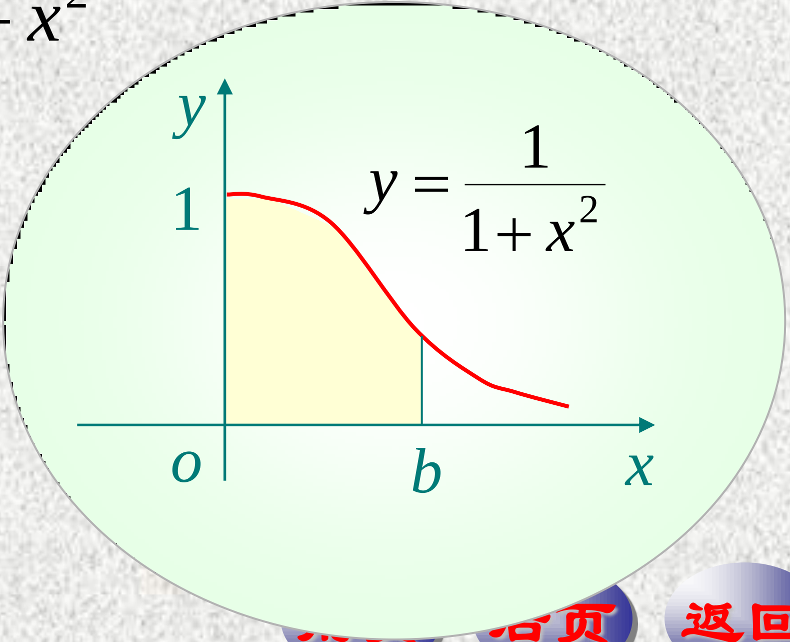
这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；若上述极限不存在，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不再表示数值了。

例如：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \arctan b$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



类似地, 设函数 $f(x)$在区间$(-\infty, b]$上连续, 取$a < b$, 如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$在无穷区间$(-\infty, b]$上广义积分, 记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛; 若上述极限不存在, 就称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$发散.

设函数 $f(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$上连续, 如果广义积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \text{ 和 } \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

都收敛, 则称上述两广义积分之和为函数 $f(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$上广义积分.记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx \qquad (3)$$

这时, 也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 否则就称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述广义积分统称为无穷限的广义积分.

例3 ：计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解:

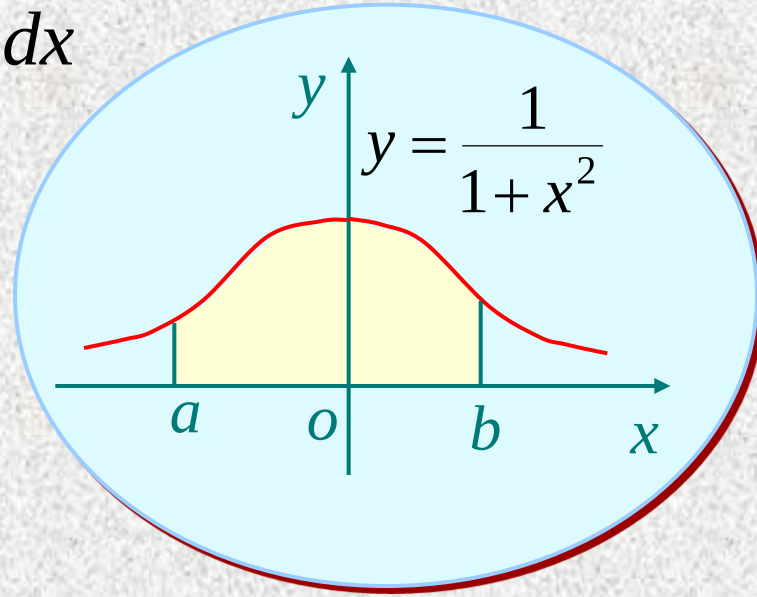
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$



注: 为方便起见, 把 $\lim_{b\to+\infty}\left[F(x)\right]_a^b$ 记作 $\left[F(x)\right]_a^{+\infty}$.

前页 后页 返回

例4 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \ (p>0)$ 的收敛性.

解 $$\int t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt} + C,$$

因此 $$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left(-\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= (0-0) - \left(0 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2}.$$

例5 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}\ (q>0)$ 的收敛性.

解
$$\int_u^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\left(1-u^{1-q}\right), & q \neq 1 \\ -\ln u, & q = 1, \end{cases}$$

故当 $0<q<1$ 时, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \lim\limits_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \frac{1}{1-q}$;

当 $1 \le q < +\infty$ 时, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 发散.

同样, 若 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 瑕积分的牛顿-莱布尼茨公式写作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

$$= F(b) - \lim_{u \to a^+} F(u).$$

前页 后页 返回

三、无界函数的广义积分

定义2: 设函数 $f(x)$在区间$(a, b]$上连续, 而在点 a 的右邻域内无界, 取$\varepsilon > 0$.如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$ 存在,

则称此极限为函数 $f(x)$在$(a, b]$上的广义积分.

仍然记作$\int_a^b f(x)dx$,即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (4)$$

这时也称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛. 如果上述极限不存在, 就称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

类似地, 设函数 $f(x)$在区间$[a, b)$上连续, 而在点 b 的左邻域内无界, 取$\varepsilon > 0$.

如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在,则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (5)$$

否则, 就称广义积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

前页 后页 返回

设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上除点$c\ (a < c < b)$外连续, 而在点 c 的邻域内无界, 如果两个广义积分

$$\int_a^c f(x)dx 与 \int_c^b f(x)dx$$

都收敛, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx \qquad (6)$$

否则, 就称广义积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

前页 后页 返回

例 6：计算广义积分$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$

解：因为 $\lim\limits_{x\to a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$

所以, $x=a$为被积函数的无穷间断点.

于是：$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_c^{a-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-0\right]_c^{a-\varepsilon}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

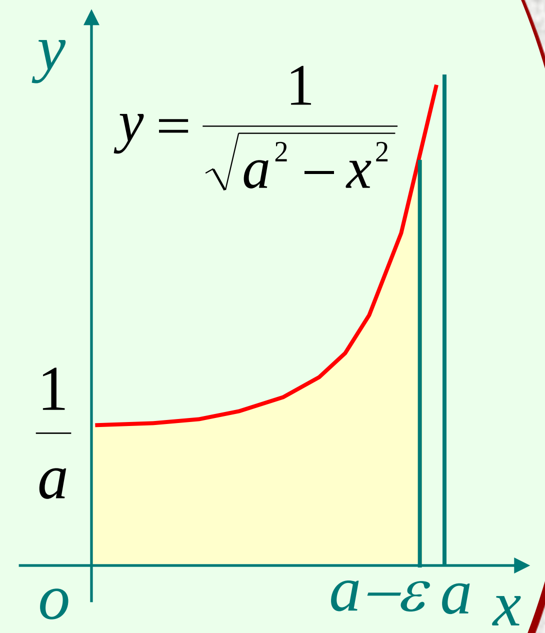


图5-7-1

前页 后页 返回

例7 计算广义积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ 。

解 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = (\int_0^1 + \int_1^3) \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

例8 证明

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$与α无关并求其值

证 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

$$=\int_0^1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx \quad =I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx \qquad (令 x=\frac{1}{t})$$

前页 后页 返回

$$=\int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

复习思考题

1. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

2. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，是否可推得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛?

3. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，是否必有 $A=0$?

四. 小结

(1) 无穷积分和瑕积分的定义;

(2) 无穷积分和瑕积分收敛与发散的定义;

(3) 无穷积分的计算:

(i). **求出函数**f(x)**的原函数**F(x).

(ii). 上限为$+\infty$时，则求出$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

上限为$-\infty$时，则求出$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

11.2 无穷积分的性质与收敛判别

一. 无穷积分的性质

二. 无穷积分收敛的判别法

三. 小结

一、无穷积分的性质

定理11.1 (无穷积分收敛的柯西准则) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists G \geq a,$ 当 $u_1, u_2 > G$ 时,

$$\left| \int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

证 设 $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x, u \in [a, +\infty)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在极限 $\lim_{u\to+\infty} F(u)$. 由函数极限的柯西准则, 此等价于

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists G > a,\ \forall u_1, u_2 > G,\ \left|F(u_1) - F(u_2)\right| < \varepsilon,$

即

$$\left|\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

根据反常积分定义, 容易导出以下性质1 和性质2.

性质1 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, k_1, k_2 为任意常数, 则

$$\int_a^{+\infty}\big(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\big)\mathrm{d}x$$

也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}\left(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质2 若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ (\forall b>a),$$

同时收敛或同时发散，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

例1　若 $f(x)\le h(x)\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在任意 $[a,u]$上可积，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 则 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 因为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

收敛, 由柯西准则的必要性,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists G > a, \forall u_1 > u_2 > G,$$

$$\left|\int_{u_2}^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x) \le h(x) \le g(x)$, 所以

$$-\varepsilon < \int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x \le \int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x \le \int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

再由柯西准则的充分性, 证得 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

二. 无穷积分收敛的判别法

1 柯西准则

无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists G \geq a, \text{只要} u_1, u_2 > G, \text{便有} \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

2，比较原则

设定义在$[a,+\infty)$上的两个函数f和g都在任何有限区间上可积，且满足 $|f(x)|\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$ 则

$$若\int_a^{+\infty} g(x)dx收敛，则\int_a^{+\infty}|f(x)|dx收敛;$$

$$若\int_a^{+\infty}|f(x)|dx发散，则\int_a^{+\infty} g(x)dx发散.$$

推论

设f和g都在任何有限区间$[a,u]$上可积，$g(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c$

(i) 当$0<c<+\infty$时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同敛散;

(ii) 当$c=0$时，若$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛;

(iii) 当$c=+\infty$时，若$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散.

3，柯西判别法

设f定义在$[a,+\infty)(a>0)$，且在任何有限区间$[a,u]$上可积，

则 当$|f(x)|\le \dfrac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$且$0<p<1$时$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛;

当$|f(x)|\ge \dfrac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$且$p\ge 1$时$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$.发散

推论

设f定义在$[a,+\infty)$，且在任何有限区间$[a,u]$上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)|=\lambda.$$

则 (i) 当$0<p<1, 0\le\lambda<+\infty$时�$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛;

(ii) 当$p\ge 1, 0<\lambda\le+\infty$时�$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散.

4，狄利克雷判别法

若 $F(x)=\int_a^u f(x)dx$ 在$[a,+\infty)$上有界， $g(x)$在$[a,+\infty)$上当$x\to+\infty$时单调趋于0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

5，阿贝尔判别法

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

例2. **讨论** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ **收敛性，**

解： 由于$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}, x \in [0,+\infty)$

且$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$收敛

根据比较原则

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 绝对收敛.

例3 判别 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 的收敛性.

解 显然 $\frac{1}{\sqrt[5]{x^6+1}}\le\frac{1}{x^{6/5}}$. 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{6/5}}$ 收敛, 因此

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 收敛.

例4 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

证 由于 $f(x)g(x) \le \dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$, 而

$$\int_a^{+\infty} \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$$

收敛, 因此 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

推论1 设非负函数 f 和 g 在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

(i) 若 $0 < c < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性相同;

(ii) 若$c=0$, 则由$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛可得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(iii) 若$c=+\infty$, 则由$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散可得$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

证 (i) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c>0$, 故存在$G>a$, 使$\forall\ x>G$, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\frac{c}{2},$$

即

$$\frac{c}{2}g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}g(x).$$

若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则可得$\int_a^{+\infty} \frac{c}{2} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 反之，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，可得 $\int_a^{+\infty} \frac{3c}{2} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，存在 $G > a$，使 $\forall\, x > G$，有

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 1,$$

即 $f(x) < g(x)$，$x \in [G, +\infty)$，因此由$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(iii) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, 存在 $G>a$, 使 $\forall\, x>G$, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>1,$$

即 $f(x)>g(x),\ x\in[G,+\infty)$, 因此由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推得 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论2 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积.

(i) 若 $f(x)\le\dfrac{1}{x^p}\ (p>1)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 若 $f(x) > \dfrac{1}{x^p}\ (p \le 1)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论3设 f 是定义在 $[a,+\infty)$上的非负函数,在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda$,则

(i) 当 $p > 1,\ 0 \le \lambda < +\infty$ 时, $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $p \le 1,\ 0 < \lambda \le +\infty$ 时, $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

说明：推论3是推论2的极限形式，读者应不难写出它的证明.

例5. 讨论下列无穷积分的收敛性,

(1) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx;$ (2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx.$

解(1): 由于$\forall \alpha \in R$, 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^\alpha e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0,$

根据柯西判别法 $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ $\forall \alpha \in R$都收敛.

解(2): 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1$

根据柯西判别法 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 发散.

例6 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性 ($k>0$).

解 (i) $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0.$

因此由推论3知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) $p\le 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-p}\ln^k x=+\infty.$

因此同理知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

例7 判别广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

解 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty,$

根据极限判别法，所给广义积分发散.

例8 判别广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的收敛性.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

根据极限判别法，所给广义积分发散.

例9 判别 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} \mathrm{d}x \quad (a>0)$ 的收敛性.

解　由于 $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \mathrm{d}x$ 收敛,

因此 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)} \mathrm{d}x$ 绝对收敛.

收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不一定是绝对收敛的.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

定理　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛；则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

证　令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+|f(x)|)$.

$\because \varphi(x)\geq 0$, 且 $\varphi(x)\leq |f(x)|$, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,

$\therefore \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也收敛. 但 $f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$,

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=2\int_a^b\varphi(x)dx-\int_a^b|f(x)|dx,$$

即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$.　收敛.

定义　满足定理条件的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 称为绝对收敛.

绝对收敛的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必定收敛.

例10　判别广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ (a,b 都是常数 $a>0$) 的收敛性.

解　$\because \left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty} \left|e^{-ax}\sin bx\right| dx$ 收敛. 所以所给广义积分收敛.

复习思考题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,是否一定存在 $\varepsilon>0, M>a$,使 $x^{1+\varepsilon} f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上有界?

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 非负, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 试问此时是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

3. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 能否推得 $\int_a^{+\infty} f^3(x)\mathrm{d}x$ 收敛?

反之呢?

4. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,是否必有 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛?

三、 小结

一. 无穷积分的性质

二. 无穷积分收敛的判别法

1 .柯西准则

2 .比较原则

3 .柯西判别法

4 .狄利克雷判别法

5 .阿贝尔判别法

11.3瑕积分的性质与收敛判别

一. 瑕积分的性质

二. 无穷积分收敛的判别方法

三. 小结

一. 瑕积分的性质

性质1 设函数 f_1 与 f_2 的瑕点同为 $x=a, k_1, k_2$ 为任意常数,若 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\int_a^b (k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x))\mathrm{d}x$ 也收敛,且

$$\int_a^b (k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x))\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质2 设函数 f 的瑕点 $x=a$, 若 $c\in(a,b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质3 设函数 f 的瑕点为 $x = a$, f 在 $(a,b]$ 的任一闭区间 $[u,b]$ $(u > a)$ 上可积, 则 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛,且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

二. 无穷积分收敛的判别方法

比较原则

设定义在 $(a,b]$ 上的两个非负函数 f 与 g, 瑕点同为 $x=a$, 在任何 $[u,b]\subset(a,b]$上都可积, 且满足

$$f(x)\le g(x),\ x\in(a,b].$$

则当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛;

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 必定发散.

推论

若非负函数 f 和 g 在任何 $[u,b]\,(a<u<b)$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$,则

(i) $0<c<+\infty$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛性相同;

(ii) $c=0$时,$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(iii) $c=+\infty$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散可推得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

柯西判别法

设非负函数 f 定义在 $(a,b]$ 上, a 为瑕点,且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积. 则有

(i) 当 $f(x)\le\dfrac{1}{(x-a)^p}$,$0<p<1$时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $f(x)\ge\dfrac{1}{(x-a)^p}$, $p\ge 1$时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论

设非负函数 f 定义于 $(a,b]$, a 为瑕点,且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积. 若 $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$,则

(i) 当 $0<p<1$, $0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $p\ge 1$, $0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

利用 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$

$$\sim\ln(1+x)\sim \mathrm{e}^x-1\quad(x\to 0),$$

可以判别一些非负函数瑕积分的收敛性.

阿贝尔判别法

设瑕积分$\int_a^b f(x)dx$只有唯一的瑕点a，$\int_a^b f(x)dx$收敛，$g(x)$在$(a,b]$单调有界，则积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛。

例1 讨论$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}dx\ (r>0)$的收敛性.

例2 讨论$\int_0^1 x^\alpha \ln x dx$的收敛性，其中$\alpha$是实数。

狄利克雷判别法

设瑕积分$\int_a^b f(x)dx$只有唯一的瑕点a，$\int_{a+\eta}^b f(x)dx$是η的有界函数，即存在$M>0$，使

$$\left|\int_{a+\eta}^b f(x)dx\right| \le M, \quad \forall 0<\eta<b-a$$

$g(x)$单调且当$x\to a$时，$g(x)$趋于0，

则积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛。

例1 判别瑕积分 $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 瑕点为 $x=1$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\frac{1}{\ln x}=\frac{\sin x}{(x-1)^{1/3}(x^2+x+1)^{1/3}\ln(1+x-1)}.$$

由于 $\frac{\sin x}{(x^2+x+1)^{1/3}} \to \frac{\sin 1}{\sqrt[3]{3}} \neq 0 \quad (x \to 1)$, 而

$$\frac{1}{(x-1)^{1/3}\ln(1+x-1)} \sim \frac{1}{(x-1)^{1/3}(x-1)} = \frac{1}{(x-1)^{4/3}},$$

因此由 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{4/3}}$ 发散知 $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 发散.

例2 判别瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 $x=0$ 是瑕点, $-\ln x \geq 0\ (x\in(0,1])$. 由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3/4}\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right| = -\lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0,$$

因此由推论3知 $\int_0^1 \left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x$ 收敛, 即 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

例3　讨论反常积分

$$\Phi(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

的收敛性.

解　把反常积分 $\Phi(a)$ 写成

$$\Phi(a)=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$=I(a)+J(a).$$

(i) 先讨论 $I(a)$. 当 $a-1\geq 0$, 即 $a\geq 1$ 时它是定积分;

当 $a<1$ 时它是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-a}\cdot\frac{x^{a-1}}{1+x}=1,$$

因此由定理11.9的推论3, 当 $0<p=1-a<1$, 即 $a>0$ 时, 瑕积分 $I(a)$ 收敛; 当 $p=1-a\ge 1$, 即 $a\le 0$ 时, $I(a)$ 发散.

(ii) 再讨论 $J(a)$, 它是无穷积分. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-a}\cdot\frac{x^{a-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

因此由定理 11.3 的推论 3, 当 $p=2-a>1$, 即 $a<1$ 且 $\lambda=1$ 时, $J(a)$ 收敛; 而当 $p=2-a\le 1$, 即 $a\ge 1$ 且 $\lambda=1$ 时, $J(a)$ 发散. 综上所述, 总结如下:

a	$a\le 0$	$0<a<1$	$a\ge 1$
$I(a)$	发散	收敛	定积分
$J(a)$	收敛	收敛	发散
$\Phi(a)$	发散	收敛	发散

所以, $\Phi(a)$ 只有当 $0<a<1$ 时才是收敛的.

例4　判别广义积分$\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$的收敛性.

解　$\because$ 被积函数在点$x=1$的左邻域内无界.

由洛必达法则知

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0,$$

根据可惜判别法极限形式,所给广义积分发散.

例5 判别广义积分 $\int_1^3 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ 的收敛性.

解 $\because \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, 而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛,

根据比较判别法, $\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$ 收敛,

从而 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ 也收敛.

复习思考题

1.试给出瑕积分的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

2. 设 $f(x)$ 为 $[a,b)$ 上的连续函数, b 为瑕点.试问当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛? 反之是否成立?

小结

一. 瑕积分的性质

二. 无穷积分收敛的判别法

1.比较原则

2.柯西判别法

3.狄利克雷判别法

4.阿贝尔判别法