1. 样本与抽样分布

数理统计的基本概念

总体　在数理统计中，常把被考察对象的某一个（或多个）指标的全体称为总体（或母体）。我们总是把总体看成一个具有分布的随机变量（或随机向量）

样本　我们把从总体中抽取的部分样品 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样本。样本中所含的样品数称为样本容量，一般用 n 表示。在一般情况下，总是把样本看成是 n 个相互独立的且与总体有相同分布的随机变量，这样的样本称为简单随机样本。在泛指任一次抽取的结果时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个随机变量（样本）；在具体的一次抽取之后，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个具体的数值（样本值）。我们称之为样本的两重性。

样本函数和统计量

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为总体的一个样本，称

$$\varphi = \varphi \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

为样本函数，其中 φ 为一个连续函数。如果 φ 中不包含任何未知参数，则称 φ（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）为一个统计量

常见统计量及其性质

样本均值　$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

样本方差　$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$

样本标准差　$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$

样本 k 阶原点矩

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1,2,\cdots.$$

样本 k 阶中心矩

$$M'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, k = 2,3,\cdots.$$

$E(\overline{X}) = \mu$，$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$，

$E(S^2) = \sigma^2$，$E(S^{*2}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$，

其中$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，为二阶中心矩

（1） 正态总体下的四大分布

正态分布

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数

$u\overset{def}{=}\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$

t 分布

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数

$$t\overset{def}{=}\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

其中 t(n-1)表示自由度为 n-1 的 t 分布

χ^2分布

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数

$$w\overset{def}{=}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1),$$

其中$\chi^2(n-1)$表示自由度为 n-1 的χ^2分布。

F 分布

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma_1^2)$的一个样本，而$y_1,y_2,\cdots,y_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma_2^2)$的一个样本，则样本函数

$$F\overset{def}{=}\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$

其中

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\overline{y})^2;$$

$F(n_1-1,n_2-1)$表示第一自由度为n_1-1，第二自由度为n_2-1的 F 分布。

（3）正态总体下分布的性质

$\overline{X}$与S^2独立。

2. 参数估计

（1）点估计	矩估计	设总体 X 的分布中包含有未知数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，则其分布函数可以表成 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$. 它的 k 阶原点矩 $v_k=E(X^k)(k=1,2,\cdots,m)$ 中也包含了未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，即 $v_k=v_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$。又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的 n 个样本值，其样本的 k 阶原点矩为 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k\ \ (k=1,2,\cdots,m).$$ 这样，我们按照“当参数等于其估计量时，总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程，即有 $$\begin{cases} v_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \\ v_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_m(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^m. \end{cases}$$ 由上面的 m 个方程中，解出的 m 个未知参数 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 即为参数（$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$）的矩估计量。 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，$g(x)$ 为连续函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计。

	极大似然估计	当总体 X 为连续型随机变量时，设其分布密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 为未知参数。又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体的一个样本，称 $$L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$ 为样本的似然函数，简记为L_n. 当总体 X 为离型随机变量时，设其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，则称 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$ 为样本的似然函数。 若似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 在 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 处取到最大值，则称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的最大似然估计值，相应的统计量称为最大似然估计量。 $$\left.\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_i}\right\|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}=0, i=1,2,\cdots,m$$ 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计，$g(x)$ 为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计。
（2）估计量的评选标准	无偏性	设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为未知参数 θ 的估计量。若 E（$\hat{\theta}$）=θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。 E（$\overline{X}$）=E（X），E（S^2）=D（X）
	有效性	设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量。若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>一致性</td>
<td colspan="2">设$\hat{\theta}_n$是θ的一串估计量，如果对于任意的正数ε，都有
$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)=0,$$
则称$\hat{\theta}_n$为θ的一致估计量（或相合估计量）。

若$\hat{\theta}$ 为θ的无偏估计，且$D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$, 则$\hat{\theta}$为$\theta$的一致估计。
只要总体的 E(X)和 D(X)存在，一切样本矩和样本矩的连续函数都是相应总体的一致估计量。</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">（3）区间估计</td>
<td>置信区间和置信度</td>
<td colspan="2">设总体 X 含有一个待估的未知参数θ。如果我们从样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$出发，找出两个统计量$\theta_1=\theta_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$\theta_2=\theta_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(\theta_1<\theta_2)$，使得区间$[\theta_1,\theta_2]$以$1-\alpha(0<\alpha<1)$的概率包含这个待估参数θ，即
$$P\{\theta_1\le\theta\le\theta_2\}=1-\alpha,$$
那么称区间$[\theta_1,\theta_2]$为θ的置信区间，$1-\alpha$为该区间的置信度（或置信水平）。</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">单正态总体的期望和方差的区间估计</td>
<td colspan="2">设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，在置信度为$1-\alpha$下，我们来确定μ和σ^2的置信区间$[\theta_1,\theta_2]$。具体步骤如下：
（i）选择样本函数；
（ii）由置信度$1-\alpha$，查表找分位数；
（iii）导出置信区间$[\theta_1,\theta_2]$。</td>
</tr>
<tr>
<td>已知方差，估计均值</td>
<td>（i）选择样本函数
$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$
（ii）查表找分位数
$$P\left(-\lambda\le\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le\lambda\right)=1-\alpha.$$
（iii）导出置信区间
$$\left[\bar{x}-\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$</td>
</tr>
</table>

		未知方差，估计均值	（i）选择样本函数 $$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$ (ii)查表找分位数 $$P\left(-\lambda\le\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le\lambda\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出置信区间 $$\left[\bar{x}-\lambda\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$
		方差的区间估计	（i）选择样本函数 $$w=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\kappa^2(n-1).$$ （ii）查表找分位数 $$P\left(\lambda_1\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\lambda_2\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出σ的置信区间 $$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\lambda_2}}S,\sqrt{\frac{n-1}{\lambda_1}}S\right]$$

3. 假设检验

基本思想

假设检验的统计思想是，概率很小的事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的，即小概率原理。

为了检验一个假设H_0是否成立。我们先假定H_0是成立的。如果根据这个假定导致了一个不合理的事件发生，那就表明原来的假定H_0是不正确的，我们拒绝接受H_0；如果由此没有导出不合理的现象，则不能拒绝接受H_0，我们称H_0是相容的。与H_0相对的假设称为备择假设，用H_1表示。

这里所说的小概率事件就是事件$\{K\in R_\alpha\}$，其概率就是检验水平α，通常我们取α=0.05，有时也取0.01或0.10。

基本步骤

假设检验的基本步骤如下：

(i)　提出零假设H_0；

(ii)　选择统计量 K;

(iii) 对于检验水平 α 查表找分位数 λ；

(iv)　由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 计算统计量之值 K;

将 $\hat{K}$ 与 λ 进行比较，作出判断：当 $|\hat{K}| > \lambda$(或 $\hat{K} > \lambda$) 时否定 H_0，否则认为 H_0 相容。

两类错误

第一类错误

当 H_0 为真时，而样本值却落入了否定域，按照我们规定的检验法则，应当否定 H_0。这时，我们把客观上 H_0 成立判为 H_0 为不成立（即否定了真实的假设），称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误，记 α 为犯此类错误的概率，即

P{否定 H_0 | H_0 为真}= α ；

此处的 α 恰好为检验水平。

第二类错误

当 H_1 为真时，而样本值却落入了相容域，按照我们规定的检验法则，应当接受 H_0。这时，我们把客观上 H_0。不成立判为 H_0 成立（即接受了不真实的假设），称这种错误为“以假当真”的错误或第二类错误，记 β 为犯此类错误的概率，即

P{接受 H_0 | H_1 为真}= β 。

两类错误的关系

人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小。但是，当容量 n 一定时，α 变小，则 β 变大；相反地，β 变小，则 α 变大。取定 α 要想使 β 变小，则必须增加样本容量。

在实际使用时，通常人们只能控制犯第一类错误的概率，即给定显著性水平 α 。α 大小的选取应根据实际情况而定。当我们宁可“以假为真”、而不愿“以真当假”时，则应把 α 取得很小，如 0.01，甚至 0.001。反之，则应把 α 取得大些。

单正态总体均值和方差的假设检验

条件	零假设	统计量	对应样本 函数分布	否定域
已知 σ^2	$H_0: \mu = \mu_0$		N（0，1）	$\|u\| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{}$

	$H_0:\mu\le\mu_0$			$u>u_{1-\alpha}$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$u<-u_{1-\alpha}$
未知σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$	$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert t\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\mu\le\mu_0$			$t>t_{1-\alpha}(n-1)$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$t<-t_{1-\alpha}(n-1)$
未知σ^2	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$w=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\kappa^2(n-1)$	$w<\kappa^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或 $w>\kappa^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$w>\kappa^2_{1-\alpha}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$w<\kappa^2_{\alpha}(n-1)$