《高等数学》第四章——不定积分

练习题 (A)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

- (1) 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上一定有原函数. ()
- (2) $\int f(x)dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. ()
- (3) 若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上一个原函数, 则 $\int f(x)dx = F(x)$. ()
- (4) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. ()
- (5) 若 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int f(u)du = F(u) + C$. ()
- (6) 如果 $f(u)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ 都是连续函数, $F(u)$ 是 $f(u)$ 的上一个原函数, 则 $F(\varphi(x))$ 是函数 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数. ()
- (7) 存在这样的函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 是它自身的一个原函数. ()
- (8) $\arcsin x$ 与 $-\arccos x$ 是同一个函数的原函数. ()
- (9) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上连续且 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\frac{d}{dx} \int f(x)dx \geq \frac{d}{dx} \int g(x)dx$. ()
- (10) 若 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) = \frac{1}{x}$. ()
- (11) $\sqrt{1-x^2}$ 是函数 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数. ()
- (12) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \int f(x)dx = F(x_0) + C$, ($x_0 \in I$). ()

(13) 若 $\frac{1}{2} \sin 2x$ 是 $\cos ax$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个原函数, 则 $a = 2$. ()

(14) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$. ()

(15) 设 $y = f(x)$, 若 $\int f(x)dx = e^x + C$, 则 $y'' - y = 0$. ()

二、填空题 (将正确答案填写在横线上)

- (1) 下列结论错误的是 ()
- A: 一切初等函数在定义区间上都有原函数
- B: 若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则对任意常数 C , $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数
- C: 若 $F(x)$ 、 $G(x)$ 均为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则 $F(x) - G(x)$ 一定是一个常数.
- D: $\ln(-x)$ 是 $-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的一个原函数.
- (2) 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则 ()
- A: $F(x)G(x)$ 是 $f(x)g(x)$ 在区间 I 上的一个原函数
- B: $\frac{F(x)}{G(x)}$ 是 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 I 上的一个原函数
- C: $F(x) \pm G(x)$ 是 $f(x) \pm g(x)$ 在区间 I 上的一个原函数
- D: $F(x)G(x)$ 是 $f(x)G(x) + g^2(x)$ 在区间 I 上的一个原函数
- (3) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 ()
- A: $y = \int f(x)dx$ 在区间 I 上连续但不可导

B: $y = \int f(x)dx$ 在区间 I 上不连续

C: $y = \int f(x)dx$ 在区间 I 上连续且可导

D: $y = \int f(x)dx$ 在区间 I 上不可微

(4) 下列等式中不成立的是 ()

A: $\int f'(x)dx = f(x) + C$

B: $\int df(x) = f(x)$

C: $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$

D: $d \int f(x)dx = f(x)dx$

(5) 下列结论不正确的是 ()

A: $\cos x$ 是 $\sin x$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个原函数

B: $\ln|\cos x|$ 是 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的一个原函数

C: $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个原函数

D: $\frac{a^x}{\ln a}, (a > 0, a \neq 1)$ 是 a^x 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个原函数

E: $1 - \sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一个原函数

(6) 下列函数中有一个不是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的原函数, 它是 ()

A: $F(x) = \ln|x| - C$ (C 为任意常数) B: $F(x) = \ln|2x|$

C: $F(x) = \ln|x| + C$ (C 为任意常数) D: $F(x) = 4\ln|x|$

E: $F(x) = \ln|Cx| + 1$ ($C \neq 1, C \neq 0$)

(7) 若函数 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则下列等式不成立的是 ()

A: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, (a \neq 0)$

B: $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(\ln x) + C$

C: $\int f(x^n)x^{n-1}dx = F(x^n) + C, (n > 1)$

D: $\int f(e^x)e^x dx = F(e^x) + C$

E: $\int f(\sin x)\cos x dx = F(\sin x) + C$

F: $\int f(\cos x)\sin x dx = -F(\cos x) + C$

(8) 若函数 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则下列等式成立的是 ()

A: $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = F(\arcsin x) + C$

B: $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = F(\arctan x) - 1$

C: $\int \frac{f(a^x)}{\ln a} a^x dx = F(a^x), (a > 0, a \neq 1)$

D: $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = F(\sqrt{x}) + C$

(9) 下列等式不成立的是 ()

A: $\int \cos \varphi(x) d\varphi(x) = \sin \varphi(x) + C$

B: $\int e^{\varphi(x)} d\varphi(x) = e^{\varphi(x)} + C$

C: $\int \sin \varphi(x) d\varphi(x) = -\cos \varphi(x) + C$

D: $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$

E: $\int \frac{d\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)} = \arctan \varphi(x)$

(10) 下列式子不成立的是 ()

A: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ B: $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

C: $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ D: $\int \csc x \cot x dx = \csc x + C$

三、选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

1. $\int d \arctan x =$ _____.
2. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx =$ _____.
3. $\int (x+1)^9 dx =$ _____.
4. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} =$ _____.
5. $\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx =$ _____.
6. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx =$ _____.
7. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____.
8. $\int (1+\frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} dx =$ _____.
9. $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x} dx =$ _____.
10. $\int \frac{e^{2t}-1}{e^t-1} dt =$ _____.
11. $\int (1+\sin 2x+\cos 2x) dx =$ _____.
12. $\int \ln x dx =$ _____.
13. $\int x \cos x dx =$ _____.
14. $(\int |\sin x| dx)' =$ _____.

15. 若 $\int \frac{1}{x} f(x) dx = \arctan x + C$, 则 $f(x) =$ _____.

16. 若 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int x f(x^2) dx =$ _____.

17. 若 $f(x) = e^{-x^2}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ _____.

18. 若 $d(\int f(x) dx) = x e^x dx$, 则 $f(\ln x) =$ _____.

19. 若 $f(x) = e^{x^2}$, 则 $\int x f(x) dx =$ _____.

20. 若 $f'(x) = 1+x$, 则 $f(x) =$ _____.

四、计算题

1. 求下列不定积分

(1) $\int e^x \cos x dx$ (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

(4) $\int x \arctan x dx$ (5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (6) $\int x^2 \ln x dx$

(7) $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ (8) $\int \frac{xdx}{x^2+2x+2}$ (9) $\int |x| dx$

2. 一曲线 $y = f(x)$ 过点 (1,1) 且在该曲线上任意点 $M(x, y)$ 的切线的斜率为 $2x$, 求曲线的方程.

《高等数学》第四章——不定积分

练习题 (B)

一、判断正误题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×)

1. 在 $(-\infty, +\infty)$ 上至少存在一个函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中实数 $p > 0$. ()
2. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. ()
3. 若 $f(x)$ 连续, 则 $y = \int f(x)dx$ 必可微. ()
4. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $x_0 \in I$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \int f(x)dx = \int f(x_0)dx$. ()
5. 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则 $F(x)G(x)$ 必是 $f(x)g(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. ()
6. 函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数的充要条件是 $F(x) = G(x)$. ()
7. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续且 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 则函数族 $y = \int f(x)dx$ 中每一个函数无极值. ()
8. 若函数 $f(x)$ 单调可导, 则曲线族 $y = \int f(x)dx$ 无拐点. ()
9. 若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $\varphi(x)$ 可导, 则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))$ 的一个原函数. ()
10. 设 $\varphi(x)$ 单调可导, $\varphi'(x) \neq 0$, 若 $F(x)$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的原函数, 则 $F(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数. ()

$$11. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, (C \text{ 为任意常数}). \quad ()$$

$$12. \int (\arcsin x + \arccos x)' dx = 0. \quad ()$$

13. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则函数族 $y = \int f(x)dx$ 中每个函数在定义区间内的任意闭区间上必有最值. ()

$$14. \text{若 } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ 则 } \int f(u)du = F(u) + C. \quad ()$$

$$15. \text{若 } \int dF(x) = \int dG(x), \text{ 则 } F(x) = G(x). \quad ()$$

二、选择题 (将正确答案的序号填写在括号内)

1. 下列结论正确的是 ()
 - A: $F(x) = \operatorname{sgn} x$ 必是某一连续函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数
 - B: $F(x) = |\sin x|$ 必是某一连续函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数
 - C: $F(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 必是某一连续函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数
 - D: $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 必是某一连续函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数
2. 函数族 $y = \int \sin 2x dx$ 中过点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 的函数的极大值为 ()
 - A: -1
 - B: 1
 - C: $\frac{1}{2}$
 - D: $-\frac{1}{2}$
3. 下列结论正确的是 ()
 - A: 奇函数的原函数必是偶函数
 - B: 偶函数的原函数必是奇函数
 - C: 周期函数的原函数必是周期函数
 - D: 单调函数的原函数必是单调函数

4. 下列式子成立的是 ()

- A: $\int e^{u+1} du = e^{u+1} + C,$ B: $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \arctan \sin x + 1$
 C: $\int \ln x dx = x \ln x - x$ D: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x + C$
 E: $\int \cos \varphi(x) d\varphi(x) = \sin \varphi(x) - 1$ (其中 C 为常数)

5. 若 $\int f(x) dx = x \arctan x + C$, 则 $\int f(\tan x) \sec^2 x dx =$ ()

- A: $x \tan x + C$ B: $x \arctan x + C$
 C: $x \tan^2 x + C$ D: $x \arctan^2 x + C$

6. 若 $\tan ax$ 是 $\sec^2 x$ 的原函数, 则 $a =$ ()

- A: 2 B: -1 C: -2 D: 1

7. 若 $\int f(x) dx = xe^{x^2} + C$, 则 $\int \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx =$ ()

- A: $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}}$ B: $-\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}} + C$
 C: $-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$ D: $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}} + C$

8. 若 $f(x)$ 可导, 则下列等式不成立的是 ()

- A: $\int f'(2x+3) dx = \frac{1}{2} f(2x+3) + C$
 B: $\int x f'(x^2) dx = \frac{1}{2} f(x^2) + C$
 C: $\int \frac{f'(\arctan x)}{1+x^2} dx = f(\arctan x) + C$
 D: $\int f'(\sec x) \tan x \sec x dx = f(x) + C$ (其中 C 为常数)

9. 若 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \arcsin \sqrt{x} + C$, 则下列式子成立的是 ()

- A: $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \arcsin x + C$
 B: $\int e^x f(e^x) dx = \arcsin e^x + C$
 C: $\int f(\sin x) \cos x dx = \arcsin(\sin x) + C$
 D: $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(\arcsin x) + C$

10. 若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ ()

- A: $F(x) + C$ B: $x f(x) + C$ C: $x F(x) + C$ D: $x f(x) - F(x) + C$

三、填空题 (将正确答案填写在横线上)

1. $\frac{d}{dx} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$ _____

2. $d \int \sin x^2 dx =$ _____

3. $\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 1} dx =$ _____

4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx =$ _____.

5. $\int (\tan x + \cot x) dx =$ _____

6. $\int |x-1| dx =$ _____

7. $\int x \ln(1+x) dx =$ _____

8. 若 $\int f(\sin x) dx = \sin x + x + C$, 则 $f(x) =$ _____

9. 若 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, 则 $\int f(x)dx =$ _____

10. 若 $\int xf(x)dx = \arccos x + C$, 则 $\int \frac{1}{f^2(x)} dx =$ _____

11. 若 $\int f(x)dx = (x^2 - 3)^2 + C$, 则 $f(x)$ 在上最大值点是 _____, 最小值点是 _____

12. 若 $\int f(x)dx = x \ln|x| + C$, 则 $f(x)$ 的单增区间为 _____, 单减区间为 _____

四、计算题

1. 求下列不定积分

(1) $\int e^x(\sin x + \cos x)dx$

(2) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(4) $\int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx$

(5) $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

(6) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$

(7) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

(8) $\int \frac{2x-2}{x^2+2x+2} dx$

(9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(10) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

2. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x}{2} + 1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$ 的原函数 $F(x)$.

3. 已知 $f'(e^x) = 1 + e^{2x}$, $f(0) = 1$, 求 $f(x)$ 及 $\int f(x)dx$.

4. 设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0,0)$, 其上任一点 $M(x,y)$ 的法线斜率为 $1+x^2$, 求此曲线的方程.

五、证明题

1. 若 x 是 $\frac{f'(\ln x)}{x}$ 的一个原函数, 证明 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数

2. 若 x^x 是 $f(x)$ 的一个原函数, 证明 $\int xf'(x)dx = x^{x+1}(1+\ln x) - x^x + C$

《高等数学》第四章——不定积分

自测题 (A)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×。每小题 2 分, 共 20 分)

1. 存在无数多个导数都是 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的函数. ()
2. 函数 $f(x) = |x|$ 一定可以作为某函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数. ()
3. 若 $F(x)$ 是连续函数在区间 I 上的原函数, 则 $F(\sin x)$ 必是 $f(\sin x) \cos x$ 在区间 I 上的原函数. ()
4. $\int (\arcsin x + \arccos x)' dx = 0$. ()
5. 若 $\int dF(x) = \int dG(x)$, 则 $F(x) = G(x)$. ()
6. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $\int f'(x) dx = f(x)$. ()
7. 曲线族 $y = \int e^{-x^2} dx$ 中每条曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内都是凸的. ()
8. 若 $\int f(\tan x) \sec^2 x dx = F(\tan x) + C$, 则 $\int f(x) dx = F(x) + C$. ()
9. 若函数 $f(x)$ 具有连续的导函数, 则 $\int f'(x) dx = f(x)$. ()
10. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\frac{d}{dx}(\int f(x) dx) \geq \frac{d}{dx}(\int g(x) dx)$ ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内。每小题 2 分, 共 10 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则下列结论不正确的是 ()
 - A: $\int f(x) dx$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数
 - B: $\int f(x) dx$ 连续但不可导
 - C: $\int f(x) dx$ 连续且可微
 - D: $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数最多相差一个常数项
2. 若 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ ()
 - A: $-\frac{1}{x} + C$
 - B: $-\frac{1}{x} + 1$
 - C: $\frac{1}{x} + 1$
 - D: $\frac{1}{x} + C$ (其中 C 为常数)
3. 若 $f(x)$ 连续且 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int e^x f(e^x) dx =$ ()
 - A: $F(e^x + C)$
 - B: $F(x) + C$
 - C: $F(e^x) + C$
 - D: $F(u) + C$
4. 若 $\int f(x) dx = xe^x + C$, 则 $\int x^{-1} f(\ln x) dx =$ ()
 - A: $xe^x + C$
 - B: $\ln x + C$
 - C: $\ln xe^x + C$
 - D: $x \ln x + C$
5. 若 $\int u(x) dv(x) = F(x) + C$, 则下列等式不成立的是 ()
 - A: $\int u(x) v'(x) dx = F(x) + C$
 - B: $\int u(t) v'(t) dt = F(t) + C$
 - C: $\int u(\sin x) dv(\sin x) = F(\sin x) + C$
 - D: $\int v(x) du(x) = u(x)v(x) - F(x) + C$
 - E: $d \int u(x) v'(x) dx = u(x) v'(x)$

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 16 分)

1. $\frac{d}{dx} \int \sin x^2 dx =$ _____.

2. $\int xe^{x^2} dx =$ _____.

3. $\int (e^x + \tan^2 x) dx =$ _____.

4. $\int 2^x dx =$ _____.

5. $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx =$ _____.

6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

7. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx =$ _____.

8. 若 $\int \frac{1}{x} f(x) dx = e^x + C$, 则 $df(x) =$ _____.

四. 计算题 (共 44 分)

1. 求下列不定积分 (每小题 5 分, 共 30 分)

(1) $\int e^x \sin x dx$

(2) $\int \frac{x}{x^2 - x - 2} dx$

(3) $\int x^2 \ln x dx$

(4) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(5) $\int \frac{1}{x^2} \sin^2 \frac{1}{x} dx$

(6) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

2. 求函数 $f(x) = \max\{x, 1\}$ 的原函数 $F(x)$. (6 分)

3. 已知 $\int f(x) dx = e^{-x} + C$, 求 $\int \frac{f'(\arctan x)}{1+x^2} dx$. (4 分)

4. 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(1, 0)$ 且在该曲线上任意一点 $M(x, y)$ 的切线的斜率

为 $2x$, 求曲线的方程. (4 分)

五. 证明题 (共 10 分)

1. 若 $y = \int e^{x^2} dx$, 证明 $y'' - 2xy' = 0$. (4 分)

2. 若 $\int x^2 f(x) dx = \arctan x + C$, 证明

$$\int xf'(x) dx = \frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{1}{x} - \arctan x + C. \quad (6 \text{ 分})$$

《高等数学》第四章——不定积分

自测题 (B)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 判断题 (判断下列各题是否正确, 正确的划√, 错误的划×. 每小题 2 分, 共 24 分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有无数多个原函数. ()
2. 偶函数的原函数一定是奇函数. ()
3. $\ln(-4x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数. ()
4. $\int (\arctan x + \operatorname{arccot} x)' dx = 0$. ()
5. 若 $f(x)$ 可导, 则 $\int f'(x) dx = f(x)$. ()
6. $d \int \arctan e^x dx = \arctan e^x$. ()
7. 若 $\int f(\sin x) \cos x dx = F(x) + C$, 则 $\int f(x) \cos x dx = F(\arcsin x) + C$. ()
8. 若 $\int xf(x) dx = \ln x + C$, 则 $\int f(x) dx = -\frac{1}{x} + C$. ()
9. 若函数 $f(x)$ 可导, 则曲线族 $y = \int f(x) dx$ 中每条曲线都是凸的充分条件是 $f'(x) > 0$. ()
10. 函数族 $y = \int e^{x^2} dx$ 中每个函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内都是单调递增. ()

二. 单项选择题 (在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将正确答案的代码填在题干上的括号内. 每小题 2 分, 共 10 分)

1. 下列函数中可以作为某些函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数的是 ()

A: $F(x) = |\sin x|$

B: $F(x) = x^{\frac{2}{3}}$

C: $F(x) = \operatorname{sgn} x$

D: $F(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
2. 若 $x \ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int e^x f(e^x) dx =$ ()

A: xe^x

B: $xe^x + 1$

C: $xe^x - 1$

D: $xe^x + C$ (其中 C 为常数)
3. 若 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \arctan \sqrt{x} + C$, 则 $f(x) =$ ()

A: $\frac{1}{1+x}$

B: $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$

C: $\frac{1}{2(1+x^2)}$

D: $\frac{1}{2(1+\sqrt{x})}$
4. 若 $f(x)$ 的导数是 $\frac{\ln x}{x}$, 则 $xf''(x)$ 有一个原函数为 ()

A: $\ln x$

B: $\ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x$

C: $\ln x + \ln^2 x$

D: $\ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x$
5. 若 $\int \frac{1}{x} dx = k \ln 2x + C$, 则 $k =$ ()

A: 1

B: -1

C: 2

D: 3

三. 填空题 (将正确答案填写在空格上, 每小题 2 分, 共 14 分)

1. 若 $f'(x) = xe^x$, 且 $f(0) = 1$, 则 $f(x) =$ _____.
2. $\int \frac{1}{1-x^2} dx =$ _____.
3. 若 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int f(x+1)dx =$ _____.
4. 若 $\int \frac{f(x)}{x} dx = \arctan x + C$, 则 $\int f'(x)dx =$ _____.
5. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}} dx =$ _____.
6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.
7. $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx =$ _____.

四. 计算题 (42 分)

1. 求下列不定积分 (每小题 4 分)

(1) $\int \frac{10x^9 + 11x^4}{x^{10} + 2x^5 + 1} dx$

(2) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

(4) $\int \ln(x - \sqrt{1+x^2}) dx$

(5) $\int \frac{\tan x + 1}{\cos^2 x} dx$

(6) $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$

(7) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

(8) $\int \frac{1}{x^2(1+4x^2)} dx$

2. 求函数 $f(x) = \max\{x, 1\}$ 的原函数 $F(x)$. (5 分)

3. 求函数族 $y = \int \cos 2x dx$ 中过点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 的函数的极值. (5 分)

五. 证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设 $I_n = \int \sin^n x dx$, 证明: $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

2. 若 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 证明: $\int x f'(x) dx = \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C$.