第四章　不定积分

主要内容：

一、不定积分的概念与性质

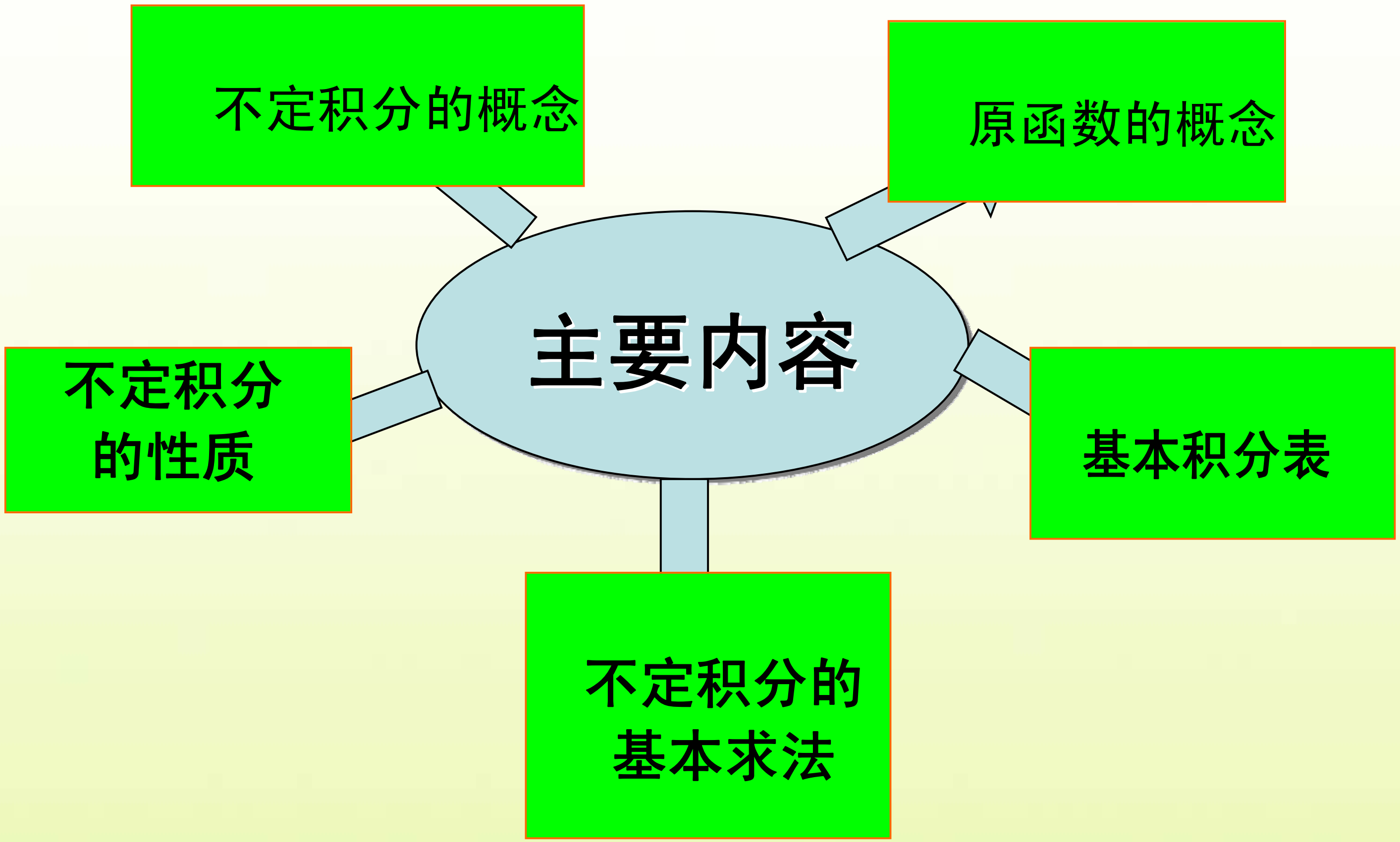
二、换元积分法

三、分部积分法

四、有理函数的积分

五、积分表的使用

§4.1 不定积分的概念与性质



一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数

（1）定义：如果对任意的 $x \in I$, 都有

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad （或 \boxed{dF(x) = f'(x)dx}）$$

则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$（或 $f'(x)dx$）区间 I 上的一个**原函数**.

原函数必需可导

anti-derivative

一、原函数与不定积分的概念

例 1. 下列函数中可以作为某些函数在$(-\infty,+\infty)$上的原函数的是（　　）

A： $F(x)=|x|$

B： $F(x)=x^{\frac{2}{3}}$

C： $F(x)=\operatorname{sgn} x$

D： $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

E： $F(x)=\sin x$

F： $F(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

一、原函数与不定积分的概念

（2）原函数的性质

定理 1：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$ 使得

$$\boxed{F'(x)=f(x)},\quad x\in I$$

即连续函数一定有原函数

注记1：初等函数在定义区间上一定有原函数

一、原函数与不定积分的概念

（2）原函数的性质

定理 2：如果 $F(x)$ 是的 $f(x)$ 原函数，则有：

①对任意的常数 C， $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数；

② $f(x)$ 的任意两个原函数最多只相差一个常数

一、原函数与不定积分的概念

证明：①由于 $F(x)$ 是的 $f(x)$ 原函数

定义

$$F'(x)=f(x)$$

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$$

定义

对任意的常数 C

$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数

证明：②由于 $F(x),G(x)$ 是 $f(x)$ 的两个原函数

定义

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x)$$

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

拉格朗日中值定理的推论

$$F(x)-G(x)=C$$

（C 是任意的常数）

注记 2：如果 $F(x)$ 是的 $f(x)$ 原函数，则 $f(x)$ 的所有的原函数

可以用 $F(x)+C$ （C 是任意的常数）表示.

一、原函数与不定积分的概念

2. 不定积分

（1）定义：**对任意的** $x \in I$, 若 $F'(x) = f(x)$，则 $f(x)$ 所有的原函数

$F(x)+C$（C 是任意的常数）

称为 $f(x)$（或 $f'(x)dx$）在区间 I 上的不定积分. 记为 $\int f(x)dx$，

即：$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

（求不定积分的运算，就是求导数运算的逆运算）

一、原函数与不定积分的概念

$\int$ ------积分号.　　$f(x)$ ---被积函数,

$f(x)dx$ --被积表达式,　　x --积分变量.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　原函数　∀常数项

一、原函数与不定积分的概念

$\int 2x\mathbf{d}x = (\qquad)$ $A:\ x^2+1$ $B:\ x^2-1$ $C:\ x^2$ $D:\ x^2+C$

例 2 设曲线通过点$(1,2)$且其上任一点出得切线斜率等于这点横坐标的两倍，求

曲线的方程

解：（1）设曲线 $y=f(x)$，则 $y'=f'(x)=2x$， 故 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数

（2）因为 $2x$ 的任意原函数为 $\int 2xdx = x^2+C$ 所以必有某个常数 C 使

$f(x)=x^2+C$ 即曲线方程为 $y=x^2+C$

（3）因所求曲线通过点$(1,2)$故 $2=1^2+C$，从而 $C=1$. 于是所求曲线方程为 $y=x^2+1$

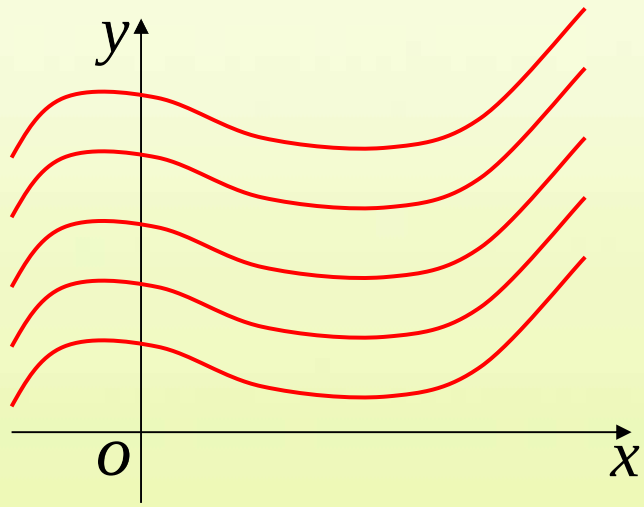
一、原函数与不定积分的概念

2. 不定积分

（2）不定积分的几何意义

$f(x)$ 的原函数 $y=F(x)$ 图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. **不定积分** $\int f(x)\mathbf{d}x$ 的图形

是 $f(x)$ **的所有积分曲线组成的平行曲线族.**



二、基本积分表

注记 3：用定义求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤

（1）： 利用 $F'(x)=f(x)$ 找出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，

（2）：将 $F(x)$ 加上任意的常数 C 即可得到 $\int f(x)dx=F(x)+C$

（1） $(C)'=0$ $\Rightarrow$ $\int 0\,\mathbf{d}x=C$

（2） $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^{\mu}$ $\Rightarrow$ $\int x^{\mu}\,\mathbf{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

（3） $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\int \dfrac{\mathbf{d}x}{x}=\ln|x|+C$

二、基本积分表

（4）$(\sin x)' = \cos x$ $\Rightarrow$ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

（5）$(\cos x)' = -\sin x$ $\Rightarrow$ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

（6）$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\Rightarrow$ $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

（7）$(\cot x)' = -csc^2 x$ $\Rightarrow$ $\int csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

（8）$(\sec x)' = \sec x\tan x$ $\Rightarrow$ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \tan x + C$

（9）$(csc\, x)' = -csc\, x\cot x$ $\Rightarrow$ $\int csc x\cot x\mathrm{d}x = -csc x + C$

二、基本积分表

（10） $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$
$$= -\arccos x + C$$

（11） $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$
$$= -\operatorname{arc}\cot x + C$$

（12） $(e^x)' = e^x$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$

（13） $(a^x)' = a^x \ln a$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

三、不定积分的性质

性质 1　两个函数和的不定积分等于各个函数不定积分的和

$$\int [f(x)+g(x)]\mathbf{d}x=\int f(x)\mathbf{d}x+\int g(x)\mathbf{d}x.$$

分项积分公式

性质 2：不为零的常数因子可以提到积分号外面.

$$\int kf(x)\mathbf{d}x=k\int f(x)\mathbf{d}x$$

注记 4　若 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 均为非零的常数，则

$$\int [k_1 f_1(x)\pm k_2 f_2(x)\pm\cdots\pm k_n f_n(x)]\mathbf{d}x = k_1\int f_1(x)\mathbf{d}x\pm k_2\int f_2(x)\mathbf{d}x\pm\cdots\pm k_n\int f_n(x)\,\mathbf{d}x.$$

三、不定积分的性质

性质3：求不定积分与求导数（微分）互为逆运算

（1）$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

（2）$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

先积后导，不积不导

（3）$\int F'(x)dx=F(x)+C$

（4）$\int dF(x)=F(x)+C$

先导后积，加上常数

三、不定积分的性质

先积后导，不积不导

先导后积，加上常数

（1）$\frac{d}{dx}\left(\int \sin x dx\right) = \sin x$

（2）$d\left(\int e^x dx\right) = e^x dx$

（3）$\int f'(x)dx = f(x) + C$

（4）$\int d\cos x = \cos x + C$

四、不定积分的求法

直接积分法：

（1）利用定义（如基本积分公式）

（2）利用基本积分公式和不定积分的运算性质

（3）恒等变形后利用基本积分公式和不定积分的

运算性质

四、不定积分的求法

例 3：求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$

分析 ： （1）**将被积函数化为** x^{μ} **形式** $\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{4}{3}}$，

（2）利用不定积分公式 $\int x^{\mu}\mathbf{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C,\quad (\mu \neq -1)$ 即可

解 将被积函数化为 x^{μ} **形式，利用积分基本公式可得**

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}}dx} \quad \boxed{= \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C} \quad \boxed{= -3x^{-\frac{1}{3}} + C}$$

四、不定积分的求法

例 4：求 $\int\left(e^{x}-3\cos x\right)dx$

分析：（1）由不定积分的性质进行分项积分

$$\int\left(e^{x}-3\cos x\right)dx=\int e^{x}dx-\int 3\cos xdx=\int e^{x}dx-3\int\cos xd$$

（2）根据基本积分公式

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C_1 \qquad \int\cos xdx=\sin x+C_2$$

可得 $\int\left(e^{x}-3\cos x\right)dx=e^{x}+C_1-3\sin x-3C_2=e^{x}-3\sin x+C$

四、不定积分的求法

例 4：求 $\int\left(e^{x}-3\cos x\right)dx$

解：由不定积分的性质及基本积分公式可得

$$\int\left(e^{x}-3\cos x\right)dx=\int e^{x}dx-\int 3\cos xdx$$

$$=\int e^{x}dx-3\int \cos xd$$

$$=e^{x}-3\sin x+C$$

四、不定积分的求法

例 5：求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

分析：显然我们无法直接使用定义及基本积分公式.

（1）将被积函数加项减项进行分拆

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4-1+1}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2} = x^2-1+\frac{1}{1+x^2}$$

（2）利用不定积分的运算法则作分项积分

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

（3）利用不定积分 $\int x^{\mu}\,\mathbf{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C, \quad (\mu \neq -1)$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \text{ 即可.}$$

四、不定积分的求法

例 5：求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：　将被积函数加项减项，由不定积分的性质及基本积分公式可得

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx = \int (x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x - \arctan x + C$$

四、不定积分的求法

例 6：求$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

分析：显然我们无法直接使用定义及基本积分公式.

（1）利用三角公式将被积函数分拆为$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

（2）利用不定积分的运算法则作分项积分

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x$$

（3）利用不定积分 $\int \sec^2 x\mathbf{d}x = \tan x + C$, $\int k\mathbf{d}x = kx + C$ 求出$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

§4.2 换元积分法

主要内容：

一、第一类换元积分法

二、第二类换元积分法

一、第一类换元积分法

（1）求$\int (x+1)^2 dx$

分析显然没有积分公式可以直接使用

（1）由于 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

（2）利用分项积分法可得$\int (x+1)^2 dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int dx$

（3）利用$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$，$\int 2x dx = x^2 + C$，$\int dx = x + C$即可得到$\int (x+1)^2 dx$

（2）如何求$\int (x+1)^{200} dx$？

一、第一类换元积分法

定理 1：设

（1） $f(u)$ 有原函数 $F(u)$，即 $\int f(u)du = F(u)+C$

（2） $u=\varphi(x)$ 可导

则 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]\Big|_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)]+C$$

即 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u)du\right]\Big|_{u=\varphi(x)}$$

我们把由 $[\int f(u)du]\Big|_{u=\varphi(x)}$ 求 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 的方法称为第一换元积分法也叫做凑微法

一、第一类换元积分法

证明：由于 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数

$u=\varphi(x)$ 可导

$F'(u)=f(u)$

由复合函数的求导法则

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x))=\frac{dF(u)}{du}\times\frac{du}{dx}=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

一、第一类换元积分法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u)du\right]\Big|_{u=\varphi(x)}$$

凑微法的实质

根据基本初等函数的微分公式把被积函数 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 中的一部分

$\varphi'(x)$ “吸收”到积分变量之中，形成新的积分变量 $u=\varphi(x)$

从而使原被积式简单化（变为 $f(u)du$）

常用的凑微公式

（1）$\mu x^{\mu-1} d x = d(x^{\mu})$ （$\mu \neq 0$）

（2） $\frac{1}{x} dx = d \ln|x|$

（3） $\cos x \, d x = d(\sin x)$

（4） $\sin x \, d x = -d(\sin x)$

(5) $\sec^2 x \, d x = d(\tan x)$

(6) $\csc^2 x \, d x = -d(\cot x)$

常用的凑微公式

$(7)\ \sec x \tan x\, dx = d(\sec x)$

$(8)\ \csc x \cot x\, dx = -d(\csc x)$

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x) = d(-\arccos x)$

$(10)\ \dfrac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x) = d(-\operatorname{arc}\cot x)$

$(11)\ a^x \ln a\, dx = d(a^x)\ (a>0, a\neq 1)$

$(12)\ e^x\, dx = d(e^x)$

一、第一类换元积分法

注记 1：对于不定积分 $\int g(x)dx$， 如果

（1）被积函数 $g(x)$ **可以化为** $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ **形式**

（2）不定积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 不易用直接积分法求出.

（3）不定积分 $\boxed{\int f(u)du}$ 容易用直接积分法求出.

我们可以利用第一换元积分法求不定积分 $\int g(x)dx$

一、第一类换元积分法

注记 2：利用第一换元积分法求不定积分 $\int g(x)dx$ 的步骤

第一步：将 $g(x)$ **化为** $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ **形式，找出** $\int g(x)dx$ **与** $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ **的关系**

第二步：令 $u=\varphi(x)$，利用**第一换元积分法**得到 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]\Big|_{u=\varphi(x)}$

第三步：求出 $\int f(u)du$

第四步：将 $u=\varphi(x)$ **代入** $\int f(u)du$ **中即可**

关键

一、第一类换元积分法

注记 4：凑微常用的方法

直接凑微法：

（1）利用被积函数与基本积分公式的相似直接凑微分

（2）利用被积函数的因式直接凑微分

变形凑微法：

代数代换、三角代换

$$\int u^{200}du=\frac{u^{201}}{201}+C$$

$$\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C$$

$$\int \cos u du=\sin u+C$$

★ 利用被积函数与基本积分公式的相似直接凑微分

例 1：求（1）$\int (x+1)^{200}dx$　　（2）$\int \frac{1}{3+2x}dx$　　（3）$\int \cos 2xdx$

（1）与 $\int x^n dx$ 形式相似

令 $u=x+1$

$$\int (x+1)^{200}dx=\int u^{200}du$$

$$\int (x+1)^{200}dx=\frac{(x+1)^{201}}{201}+C$$

（2）与 $\int \frac{1}{x}dx$ 形式相似

令 $u=3+2x$

$$\int \frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{1}{3x+2}dx=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$$

（3）与 $\int \cos xdx$ 形式相似

令 $u=2x$

$$\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}\int \cos udu$$

$$\int \cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

一、第一类换元积分法

例 1：求（1）$\int (x+1)^{200} dx$　　（2）$\int \frac{1}{3+2x} dx$　　（3）$\int \cos 2x dx$

解：（1）令 $u = x+1$，则 $du = dx$. 由第一换元积分法及积分公式可得

$$\int (x+1)^{200} dx = \int u^{200} du = \frac{u^{201}}{201} + C = \frac{(x+1)^{201}}{201} + C$$

（2）令 $u = 3+2x$，则 $du = 2dx$. 由由第一换元积分法及积分公式可得

$$\int \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C$$

（3）令 $u = 2x$，则 $du = 2dx$. 由由第一换元积分法及积分公式可得

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

问题 1：若 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是基本积分公式，

如何求 $\int f(ax+b)dx \ (a \neq 0)$ ？

分析：（1）比较 $\int f(ax+b)dx$ 与 $\int f(x)dx$

发现

$\int f(ax+b)dx$ 与与 $\int f(x)dx$ 形式相似

利用 $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ 凑微

只要将 $\int f(ax+b)dx$ 化为 $\int f(ax+b)d(ax+b)$ 二者的形式就相同

由第一换元积分法

令 $u = ax + b$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

一、第一类换元积分法

结论 1：对 $\int f(ax+b)dx$ （$\alpha \neq 0$），令 $u=ax+b$ 凑微可得

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(u)du$$

利用基本积分公式求 $\int f(ax+b)dx\ (a\neq 0)$ 的思路

（1）找出基本积分公式中与 $\int f(ax+b)dx$ 相似的公式 $\int f(x)dx$

（2）令 $u=ax+b$，利用 $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$ 凑微找出 $\int f(ax+b)dx$ 与 $\int f(u)du$ 的关系式

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(u)du$$

（3）利用基本积分公式 $\int f(u)du=F(u)+C$ 得到 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(u)+C$

（4）将 $u=ax+b$ 代入可得 $\int f(ax+b)dx$

★ 利用被积函数的因式直接凑微分

例 3： 求（1）$\int 2xe^{x^2}dx$ （2）$\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ （3）$\int \frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx$

（1）

在被积表达 $2xe^{x^2}dx$ 中出现了 $2x$

利用 $d\left(x^2\right)=2xdx$

把 $2x$ “吸到” dx 中

$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}d(x^2)$.

令 $u=x^2$

$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{u}du$

（2）

在被积表达式 $t^{-\frac{1}{2}}\sin\sqrt{t}dt$ 中出现了 $t^{-\frac{1}{2}}$

利用 $d\left(\sqrt{t}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}dt=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

把 $t^{-\frac{1}{2}}$ “吸到” dt 中

$\int t^{-\frac{1}{2}}\sin\sqrt{t}dt=2\int\sin\sqrt{t}d(\sqrt{t})$

令 $u=\sqrt{t}$

$\int t^{-\frac{1}{2}}\sin\sqrt{t}dt=2\int\sin udu$

（3）

在被积表达式 $\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx$ 中出现了 $\frac{1}{x^2}$

利用 $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}dx$

把 $\frac{1}{x^2}$ “吸到” dx 中

$\int\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx=-\int\sec^2\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})$

令 $u=\frac{1}{x}$

$\int\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx=-\int\sec^2 udu$

一、第一类换元积分法

例 3：求（1）$\int 2xe^{x^2}dx$　（2）$\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$　（3）$\int \frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx$

解：（1）令 $u=x^2$，则 $du=2xdx$ 从而 $\int 2xe^{x^2}dx=\int e^u du=e^u+C\ =e^{x^2}+C$

（2）令 $u=\sqrt{x}$, 则 $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int \sin u du=-2\cos u+C=-2\cos\sqrt{x}+C$

（3）令 $u=x^{-1}$，则 $du=-x^{-2}dx$，从而

$$\int \frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}dx=-\int \sec^2 u du=-\tan u+C=-\tan\frac{1}{x}+C$$

问题 2：若 $\int f(x)dx = F(x)+C$

如何求 $\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx$ （$\alpha \neq 0,-1$）？

分析：（1）比较 $\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx$ 与 $\int f(x)dx$

发现

发现被积函数的因式 $f(x^{\alpha})$ 与 $f(x)$ 有关系

利用 $dx = \frac{1}{\alpha} d\left(x^{\alpha-1}\right)$ 凑微

将 $\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx$ 化为 $\int f(x^{\alpha})dx^{\alpha}$

由第一换元积分法　　令 $u = x^{\alpha}$

$$\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}\int f(u)du$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$$\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}F(u)+C = \frac{1}{\alpha}F(x^{\alpha})+C$$

一、第一类换元积分法

结论 2：对$\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx$（$\alpha \neq 0$），令$u = x^{\alpha}$凑微可得

$$\int x^{\alpha-1} f(x^{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}\int f(u)du$$

特别地：（1）对 $\int x^{n-1} f(x^{n})dx$（$n \in N^{+}$），令$u = x^{n}$,则 $\int x^{n-1} f(x^{n})dx = \frac{1}{n}\int f(u)du$.

（2） 对 $\int x^{-\frac{1}{2}} f(\sqrt{x})dx$，令$u = \sqrt{x}$,则 $\int x^{-\frac{1}{2}} f(\sqrt{x})dx = 2\int f(u)du$.

（3） 对 $\int x^{-2} f(x^{-1})dx$，令$u = x^{-1}$,则 $\int x^{-2} f(x^{-1})dx = -\int f(u)du$.

★ 利用被积函数的因式直接凑微分

例 4：求 $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

分析：在被积表达 $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx$ 中出现了 $\frac{1}{x}$

利用 $d\ln x = \frac{1}{x}dx$ 把 $\frac{1}{x}$ 吸到 dx 中凑微得

$$\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}d(\ln x)$$

令 $u = \ln x$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}du$$

解：令 $u = \ln x$ 即可，则 $du = \frac{1}{x}$ 从而

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|\ln x| + C$$

一、第一类换元积分法

结论 3：对 $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx$ 令 $u=\ln x$ 可得 $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int f(u)du$.

课堂训练---- 求（1） $\int \frac{\ln x}{x}dx$ （2） $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$ （3） $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}dx$

利用 $\boxed{a^x dx = \frac{1}{\ln a} d\left(a^x\right)}$ **凑微可得** $\boxed{\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)da^x}$

结论 4：对 $\boxed{\int f(a^x)a^x dx}$，令 $\boxed{u=a^x}$，则 $\boxed{\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(u)du}$

特别地：对 $\int f(e^x)e^x dx$，令 $\boxed{u=e^x}$，则 $\boxed{\int f(e^x)e^x dx = \int f(u)du}$

一、第一类换元积分法

例 5 求$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

分析：（1）显然$\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{1+\left(e^x\right)^2} \cdot e^x$

（2）利用$e^x dx = d\left(e^x\right)$可将$e^x$吸到$dx$中

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}de^x$$

（3）因此令$u=e^x$可得 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+u^2}du$

解：令$u=e^x$，则$e^x dx = d\left(e^x\right)$从而

$$\int \frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}dx = \int \frac{1}{1+u^2}du = arc\tan u + C = arc\tan e^x + C$$

一、第一类换元积分法

例 6：求 $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx$

分析：（1）$\frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} = \frac{\sin x}{1+\sin^4 x} \cdot \cos x$

（2）利用 $\cos x dx = d(\sin x)$ 可以把 $\cos x$ 吸到 dx 中凑微得到

.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{1+\sin^4 x} d \sin x .$$

（3）令 $u = \sin x$ 即可，可得

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{u}{1+u^4} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(u^2\right)^2} du^2 = \frac{1}{2} \arctan u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} \arctan\left(\sin^2 x\right) + C$$

一、第一类换元积分法

结论 5：对 $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$，令 $u=\sin x$ 则 $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(u)du$

结论 6：对 $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$，令 $u=\cos x$ 则. $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(u)du$.

例 7：求 $\int \tan xdx$

解：令 $u=\cos x$ 则 $du=-\sin xdx$，所以

$$\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+C$$

$$=-\ln|\cos x|+C$$

一、第一类换元积分法

结论 7： 对 $\int f(\tan x)\sec^2 xdx$，令 $u=\tan x$ 则 $\int f(\tan x)\sec^2 xdx=\int f(u)du$

例 8： 求 $\int \tan^{10} x\sec^2 xdx$

分析： （1）显然 $\tan^{10} x\sec^2 xdx$ 中出现了 $\sec^2 x$.

（2）利用 $d\tan x=\sec^2 xdx$ 将因式 $\sec^2 x$ 吸到 dx 中凑微得

$$\int \tan^{10} x\sec^2 xdx=\int \tan^{10} xd\tan x$$

（3）因此令 $u=\tan x$，可得 $\int \tan^{10} x\sec^2 xdx=\int u^{10}du$

解： 令 $u=\tan x$ 则 $du=\sec^2 xdx$，所以

$$\int \tan^{10} x\sec^2 xdx=\int u^{10}du=\frac{1}{11}u^{11}+C=\frac{1}{11}\tan^{11} x+C$$

一、第一类换元积分法

结论 8： 对$\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{dx}$，令$u=\sec x$则 $\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{dx}=\int f(u)du$.

例 9： 求$\int \tan^3 x\sec xdx$

分析： （1）显然$\tan^3 x\sec x=\tan^2 x\left(\tan x\sec x\right)=(\sec^2 x-1)(\tan x\sec x)$

中出现了$\tan x\sec x$.

（2）利用$d\sec x=\tan x\sec xdx$，将因式$\tan x\sec x$吸到dx中凑微得

$$\int \tan^3 x\sec xdx=\int(\sec^2 x-1)d\sec x$$

（3）因此令$u=\sec x$，可得 $\int \tan^3 x\sec xdx=\int(\sec^2 x-1)d\sec x=\int(u^2-1)du$

一、第一类换元积分法

★ 利用被积函数因式直接凑微分

结论 9：对 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arcsin x)dx$，令 $u=\arcsin x$. 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arcsin x)dx = \int f(u)du\,.$$

结论 10：对 $\int \frac{1}{1+x^2} f(\arctan x)dx$，令 $u=\arctan x$ 则

$$\int \frac{1}{1+x^2} f(\arctan x)dx = \int f(u)du\,.$$

一、第一类换元积分法

◆变形凑微

常用的恒等变形法

(1) 三角公式法

(2) 代数法

恒等变形

降　　幂

积化和差

三角公式

（1）$1+\tan^2 x=\sec^2 x$；

（2）$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

（3）$\sin 2x=2\sin x\cos x$

（4）$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

（5）$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

（6）$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

（7）$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

（8）$\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

三角公式

（9）$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

（10）$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

（11）$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

（12）$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（13）$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

（14）$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

（15）$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

（16）$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\right]$

降幂 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

例 10：求（1）$\int \cos^2 3x dx$（2）$\int \sin 3x \cos 4x dx$

积化和差：

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

解：（1）$\int \cos^2 3x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1dx + \int \cos 6x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int 1dx + \frac{1}{6}\int \cos 6x d(6x)\right]$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12} + C$$

解（2）$\int \sin 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int [\sin(3x+4x)+\sin(3x-4x)]dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x - \sin x]dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin 7x dx - \int \sin x dx\right] = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{14}\int \sin 7x d7x$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{14}\cos 7x + C$$

一、第一类换元积分法

恒等

变形

例 11：证明 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.(a>0)$

分析：（1）显然对照基本积分表，我们发现 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ 与 $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ 相似

（2）由于 $$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

（3）令 $u=\frac{x}{a}$，则 $du=\frac{1}{a}dx$ 从而 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{du}}{1+u^2}$

（4）根据基本积分公式可得 $\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{du}}{1+u^2}=\frac{1}{a}\arctan u+C$

（5）将 $u=\frac{x}{a}$ 代入上式，可得 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$

二、第二类换元积分法

定理 2 （第二换元法）（1） 设函数 $f(x)$ 连续

（2）函数 $x=\varphi(t)$ 单调可微且 $\varphi'(t)\neq 0$

（3）$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C,$

则

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

注记 1： 第二换元法使用的前提

（1） $\int f(x)dx$ 不容易求出

（2）$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 容易求出.

注 记

注记 2：用第二换元法求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤

第一步：观察被积函数作适当的换元 $x=\varphi(t)$ （**单调可微且** $\varphi'(t)\neq 0$ ）

第二步：把 $\int f(x)dx$ **转换为** $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ **即** $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

第三步：求 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+C$

第四步 将 $x=\varphi(t)$ **的反函数** $t=\varphi^{-1}(x)$ **代入 上式中 即可得到**

$$\int f(x)dx=F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

第二类换元积分法常用的代换

三角代换

（1） 含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时, **作三角代换** $x=a\sin t$ **或** $x=a\cos t$

（2） 含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时, **作三角代换** $x=a\tan t$ **或** $x=a\cot t$

（3） 含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, **作三角代换** $x=a\sec t$ **或** $x=a\csc t$

例 12. 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$（$a>0$）.

分析：（1）观察被积函数连想到 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ **我们**令 $x=a\sin t$

为了保证该函数有反函数，取 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，此时 $t=\arcsin\frac{x}{a}$

（2） $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$

（3） $\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\quad=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$

（4）由于 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，所以 $\sin t=\frac{x}{a},\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, 从而

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 12. 求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$（$a>0$）.

解：（1）令$x=a\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,显然该函数可导且存在反函数$t=\arcsin\frac{x}{a}$

（2）$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t,\quad dx=a\cos t dt$，

所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

（3）

$$\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

（4）由于$t=\arcsin\frac{x}{a}$，所以$\sin t=\frac{x}{a},\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$,

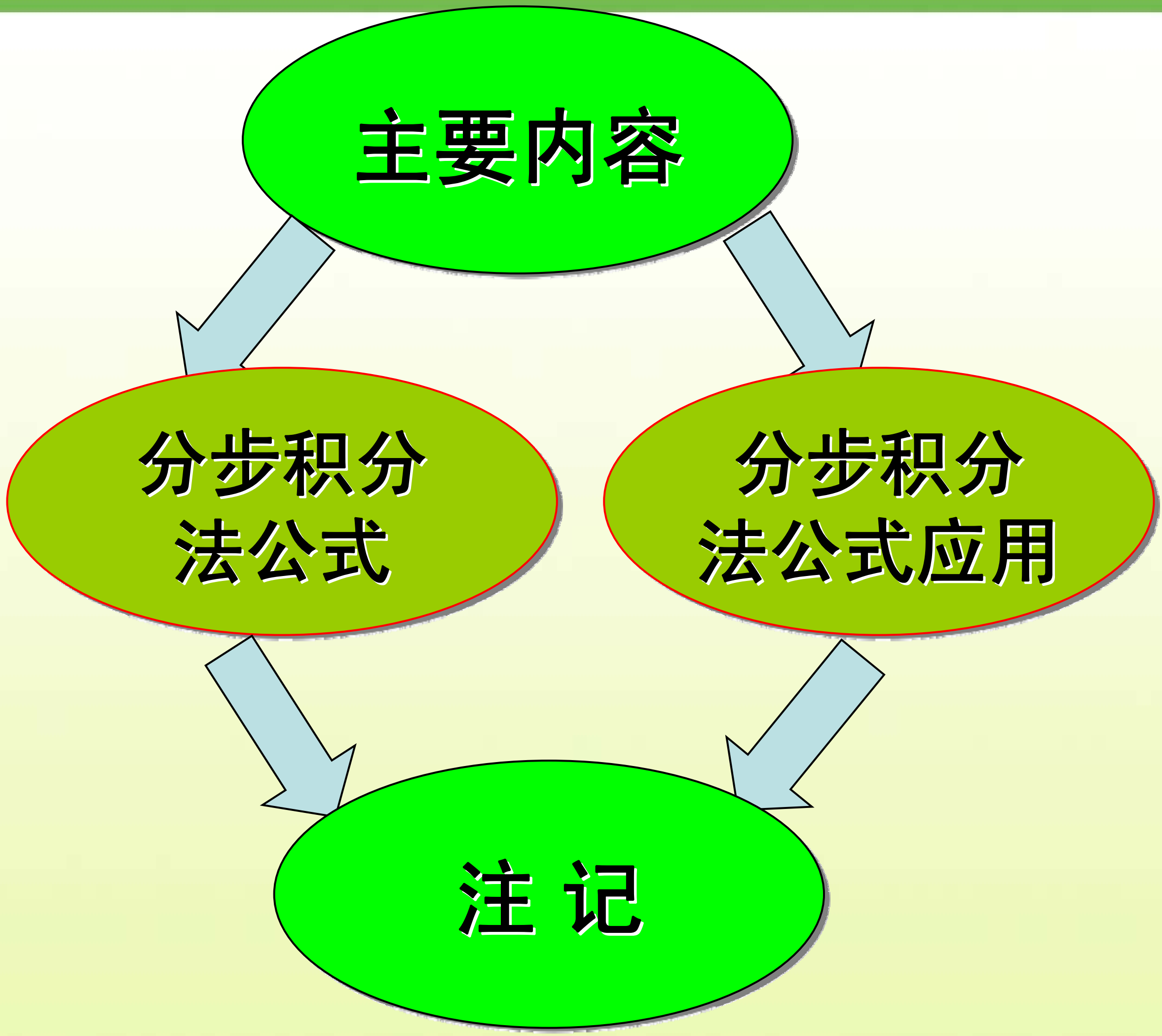
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\ (a > 0) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ (a > 0) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

§4.3 分部积分法



§4.3　分部积分法

问题：设 $u=u(x), v=v(x)$ 都有连续的导数，如何求 $\int u(x)v'(x)dx$？

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$u'v=(uv)'-uv'$$

$$\int uv'dx=\int (uv)'dx-\int vu'dx \qquad \int (uv)'dx=uv+C$$

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

§4.3　分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 都有连续的导数，则

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx}$$

简记为

$$\boxed{\int uv'dx = uv-\int vu'dx}$$

该公式可连续运用多次.

或

$$\boxed{\int udv = uv-\int vdu}$$

注记 1：使用公式 $\int udv = uv-\int vdu$ 的前提：

（1）$\int udv$ 不易求出

（2）$\int vdu$ 容易求出

§4.3 分部积分法

注记 2　　应用分部积分法求不定积分的步骤

第一步：观察被积函数 $f(x)$ 选择 $\boxed{u,v}$ 使得 $\int f(x)dx=\int uv'dx=\int udv$

第二步：由定理可得 $\int f(x)dx=uv-\int vdu$

第三步：求 $\int vdu$ 后代入即可

注记 3：选择 u,v 的原则：

（1）选 dv 使其原函数 v 易求.

（2）转化后的 $\int vdu$ 要比原来的 $\int udv$ 更简单易求.

注记 3：（1）求 $\int x^n\cos xdx$ 时，通常取 $u=x^n,v'=\cos x$

（2）求 $\int x^n\sin xdx$ 时，通常取 $u=x^n,v'=\sin x$

（3）求 $\int x^n e^x dx$ 不定积分时通常取 $u=x^n,v'=e^x$

§4.3　分部积分法

例 1：求 $\int x\cos x dx$

分析；(1) 显然 $\int x\cos x dx$ 是 $\int x^n \cos x dx$ 形式

（2）因此取 $u = x, v' = \cos x$，则 $u' = 1, v = \sin x,$

（3）$\int v du = \int \sin x dx = -\cos x + C$ 容易求出

解：设 $u = x, v' = \cos x,$ 则 $u' = 1, v = \sin x,$ 于是

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

§4.3 分部积分法

例 2：求 $\int xe^x dx$

分析；(1) 显然 $\int xe^x dx$ 是 $\int x^n e^x dx$ 形式

（2）设 $u = x, v' = e^x$，则 $u' = 1, v = e^x$ 则 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

（3）$\int e^x dx = e^x + C$

解：（1）令 $u = x, v' = e^x$，则 $u' = 1, v = e^x$

所以 $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

§ 4.3　分部积分法

注记 4：求 $\int x^n \ln x dx$ 时通常取 $u = \ln x, v' = x^n$

例 3. 求 $\int x \ln x dx$

分析：（1）显然 $\int x \ln x dx$ **是** $\int x^n \ln x dx$ **形式**

（2）因此取 $u = \ln x, v' = x,$ **，则** $u' = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{2}x^2,$

（3） $\int v du = \int x^2 \times \frac{1}{x} dx = \int x dx$ **容易求出**

解：取 $u = \ln x, v' = x$，则 $u' = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{2}x^2,$

从而

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \times \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

§4.3 分部积分法

注记 5：（1）求 $\int x^n \arctan x dx$ 时，通常取 $u = \arctan x, v' = x^n$

（2）求 $\int x^n \arcsin x dx$ 时，通常取 $u = \arcsin x, v' = x^n$

例 4. 求 $\int x \arctan x dx$

解： 取 $u = \arctan x, v' = x$ 则 $u' = \dfrac{1}{1+x^2}, v = \dfrac{1}{2}x^2$. 由分步积分法可得

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C .$$

§4.3　分部积分法

例 5.　求 $\int e^x \sin x dx$

解：$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x \quad = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

将 $\int e^x \sin dx$ 移项右边合并可得

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

注记 6：求 $\int e^{mx} \sin^n x dx$ $\int e^{mx} \cos^n x dx$ 时不能直接求得，但可间接求得

§ 4. 3　分部积分法

例 6.　求 $I_n=\int\cos^n xdx$

解　$I_n=\int\cos^n xdx=\int\cos^{n-1}xd(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}xdx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}xdx-(n-1)\int\cos^n xdx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

（1）　$I_n=\int\cos^n xdx$ **的递推公式**：$I_n=\dfrac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

（2）　$I_n=\int\sin^n xdx$ **的递推公式**：$I_n=-\dfrac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

§4.3　分部积分法

在计算某些积分时，要同时使用换元法与分部积分法才能完成计算.

例 7：$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$；

解 $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx \xlongequal{令\sqrt[3]{x}=t} 3\int t^2 e^t dt = 3\int t^2 de^t$

$$= 3t^2e^t - 6\int te^t dt = 3t^2e^t - 6\int t de^t$$

$$= 3t^2e^t - 6te^t + 6\int e^t dt$$

$$= 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + C$$

$$= \left(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6\right)e^{\sqrt[3]{x}} + C$$

小　结

选取 u 的一般顺序

反：　反三角函数

对：　对数函数

幂：　幂函数

指：　指数函数

三：　三角函数

§4.4 有理函数及无理函数的不定积分

主要内容

- 有理函数的不定积分
  - 配方法
  - 分解法
  - 公式法
- 无理函数的不定积分
  - 根式法
  - 倒数法

一 有理函数函数的不定积分

1. 有理函数：多项式的比值——有理函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

（1） $P(x)$的次数大于$Q(x)$的次数，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理假分式

（2） $P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理真分式

当$\frac{P(x)}{Q(x)}$是假分式时，一定有多项式$T(x)$、$F(x)$，$\partial(F(x))<\partial(Q(x))$使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{F(x)}{Q(x)}$$

一 有理函数函数的不定积分

2. 求有理函数不定积分常用的方法---配方法

例 1：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$

解：$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{1+(x+1)^2}$

$$= \arctan(x+1) + C.$$

（1）求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$　（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}$

一 有理函数函数的不定积分

2. 求有理函数不定积分常用的方法----**分解法**

例 2：求 $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

解： $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{(x+1)}dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{x-1}d(x-1)-\int\frac{1}{(x+1)}d(x+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

2. 求有理函数不定积分常用的方法----公式法

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

例 3：求 $\int \frac{x}{x^2+2x+3}dx$

解： $$\int \frac{x}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\left(x^2+2x+3\right)'}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - \arctan\left(x+1\right) + C$$

二、 三角函数有理式积分

三角函数有理式:

若 $R(x)$ 为有理函数，则称 $R(\sin x, \cos x)$ 为三角函数有理式.

把 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **称为三角函数有理式的不定积分**

借助于**万能变换**: 令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

三、简单根式的积分

解决这个问题的基本思路是利用变量置换使其“有理化”

例 3 求$\int \frac{x\tan\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解： 令$t=\sqrt{1+x^2}$，则 $dt=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

从而 $\int \frac{x\tan\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \tan t dt$

$$=-\ln\left|\cos t\right|+C$$

$$=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$$

三、简单根式的积分

例 4 求 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$

解：令 $u=\sqrt{x+1}$ **，则**

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx=\int \frac{u-1}{u+1}\cdot 2udu$$

$$=2\int (u-2+\frac{2}{u+1})du$$

$$=2(\frac{1}{2}u^2-2u+2\ln|u+1|)+C$$

$$=(x+1)-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$$

三、简单根式的积分

例 5 求$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

解：令$t=\frac{1}{x}$则 $dt=-\frac{1}{x^2}dx$

从而

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=-\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}dt=-\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt^2=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}d(1+t^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt^2=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}d(1+t^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$