第十七章 多元函数微分学

§1 可微性与偏导数

一、可微性与全微分

二、偏导数

三、可微性条件

四、可微性的几何意义及应用

一、可微性与全微分

由一元函数微分学中增量与微分的关系得

$$\boxed{\begin{matrix} f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \\ f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{matrix}} \begin{matrix} \approx \\ \approx \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} f_x(x,y)\Delta x \\ f_y(x,y)\Delta y \end{matrix}}$$

二元函数
对 x 和对 y 的偏增量

二元函数
对 x 和对 y 的偏微分

前页 后页 返回

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 在某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 对于 $P(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(P_0)$, 若 f 在 P_0 的全增量 Δz 可表示为:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

其中A, B是仅与点 P_0 有关的常数, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量, 则称 f 在点 P_0 **可微**. 并称 (1) 式中关于$\Delta x, \Delta y$ 的线性表达式 $A\Delta x + B\Delta y$

为 f 在 P_0 的全微分, 记作

$$\mathrm{d}z\,|_{P_0} = \mathrm{d}f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$

当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 充分小时, 全微分 $\mathrm{d}z$ 可作为全增量 Δz 的近似值, 于是有近似公式:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

在使用上, 有时也把 (1) 式写成如下形式:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

这里 $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \alpha = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \beta = 0.$

例1 考察 $f(x,y)=xy$ 在任一点 (x_0,y_0) 的可微性.

二、偏导数

定义 2 设函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$, 且 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义. 则当极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在时, 称此极限为 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数, 记作

$$f_x(x_0,y_0),\text{ 或 }\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地可定义 f 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$f_y(x_0,y_0),\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

注1 这里 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是专用于偏导数的符号, 与一元函数的导数符号 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 相仿, 但又有区别.

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内任一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x \text{或} \quad f_x(x,y).$$

同理可定义函 数$z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，
记作

$$\frac{\partial f}{\partial y}\text{或}\ Z_y,\ f_y(x,y)\quad .$$

前页 后页 返回

由偏导数的定义可知，偏导数本质上是一元函数的微分法问题。

求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时， 只要把 x 之外的其他自变量暂时看成常量，对 x 求导数即可。

求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时， 只要把 y 之外的其他自变量暂时看成常量，对 y 求导数即可。

其它情况类似。

有关偏导数的几点说明：

1、偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分；

2、求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求.

偏导数的几何意义： $z = f(x, y)$ 的几何图象通常是三维空间中的曲面, 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为此曲面上一点, 其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$. 过点 P_0 作平面 $y = y_0$, 它与曲面相交得一曲线：

$$C: \ y = y_0, \ z = f(x, y).$$

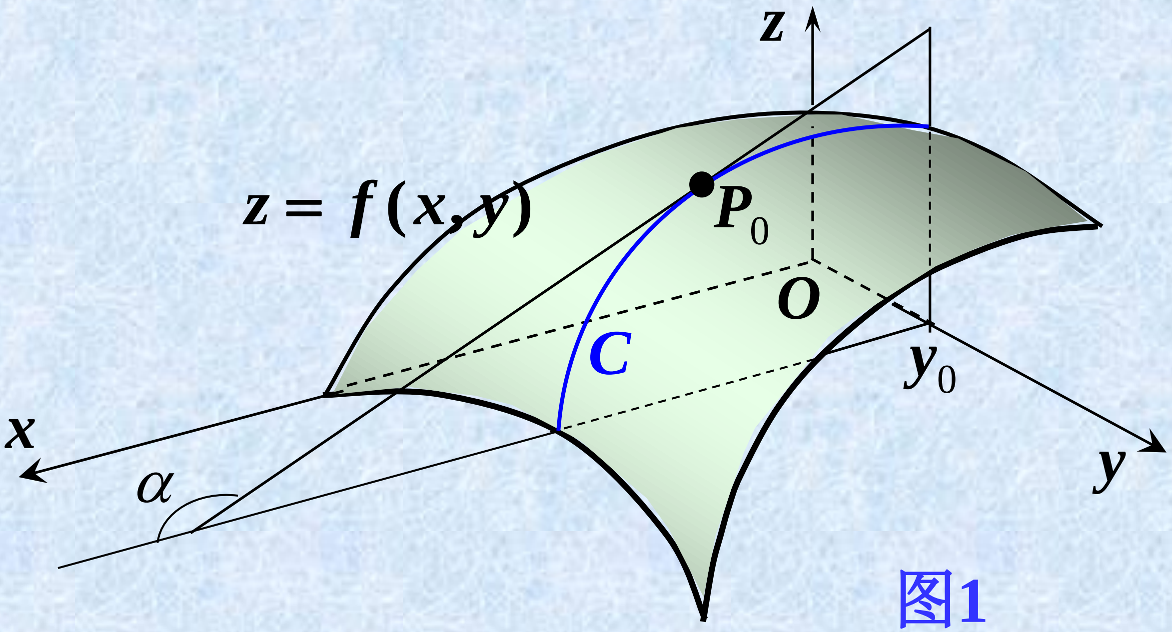


图1

如图 所示，偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 的几何意义为:

在平面 $y = y_0$ 上，曲线 C 在点 P_0 处的切线与 x 轴

正向所成倾角 α 的正切.

前页 后页 返回

例2 求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$ 在点 $(1,3)$ 处关于 x 和关于 y 的偏导数.

例3 求函数 $z=x^y\ (x>0)$ 的偏导数.

例4 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

求 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$.

三、可微性条件

由可微定义易知：若 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 则 f 在 P_0 必连续. 这表明:

$$\boxed{\text{连续是可微的一个必要条件.}}$$

定理17.1 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在 ,且(1) 式中的

$$A = f_x(x_0, y_0), B = f_y(x_0, y_0).$$

于是，函数 f 在点 (x_0, y_0) 的全微分 (2) 可惟一地表示为

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

则全微分又可写为

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

$(\Delta x = \mathrm{d}x\ ,\ \Delta y = \mathrm{d}y)$

若函数 f 在区域 D 的每一点 (x, y) 都可微，则称函数 f 在区域 D 上可微，且 f 在 D 上的全微分为

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理17. 1 的应用: 对于函数

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

由于 $f(x,0) = |x|$, $f(0,y) = |y|$, 它们分别在 $x = 0$ 与 $y = 0$ 都不可导，即 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

例5 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在原点的可微性.

定理 17.2 (可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在偏导数 f_x 与 f_y ,且它们在点 P_0 连续, 则 f 在点 P_0 可微.

例3中的函数 $z = x^y$ 在 $\{(x,y) \mid x > 0, -\infty < y < +\infty\}$

上满足定理 17.2 的条件，亦在其定义域上可微.

注意　偏导数连续并不是可微的必要条件，例如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

它在原点 $(0,0)$ 处可微, 但 f_x 与 f_y 却在该点不连续.

前页　后页　返回

若 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 都连续, 则称 f 在点 (x_0,y_0) 连续可微.

定理 17.3 设函数 f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在偏导数, 若 (x,y) 属于该邻域, 则存在

$$\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0) \text{ 和 } \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0),$$

$$0 < \theta_1, \theta_2 < 1,$$

使得

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(\xi,y)(x - x_0) + f_y(x_0,\eta)(y - y_0).$$

四、可微性的几何意义及应用

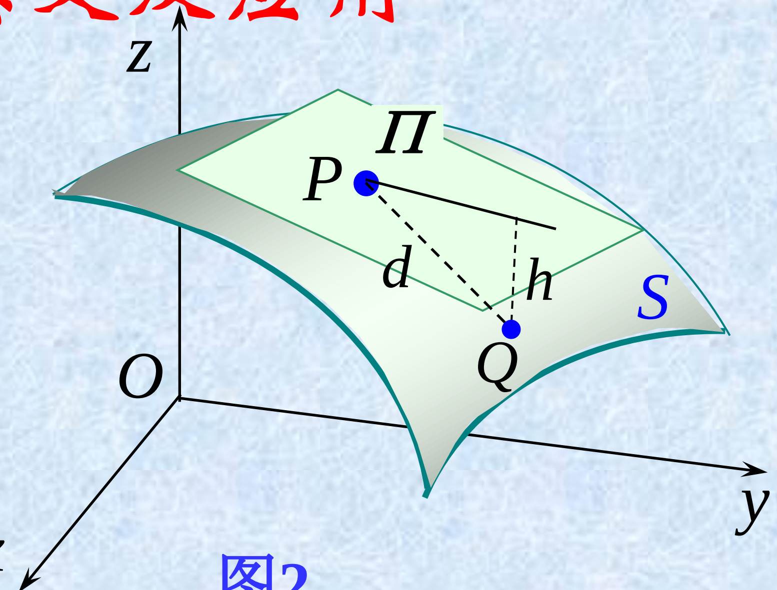


图2

定义 3 设曲面 S 上一点 P, Π 为通过点 P 的一个平面, S 上的动点 Q 到定点 P 和到平面 Π 的距离分别记为 d 和 h. 若当 Q 在 S 上以任意方式趋近于 P 时，恒有 $\dfrac{h}{d} \to 0,$

则称 Π 为曲面 S 在点 P 的切平面，称 P 为切点.

定理 17.4 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在不平行于 z 轴的切平面的充要条件是：函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微.

定理 17.4 说明： 函数 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

过切点 P 与切平面垂直的直线称为曲面在点 P 的

法线. 由切平面方程知道，法向量为

$$\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1),$$

于是过切点 P 的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

二元函数全微分的几何意义： 如图3 所示, 当自变量 (x, y) 由 (x_0, y_0) 变为 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 时，函数 $z = f(x, y)$ 的增量 Δz 是 z 轴方向上的一段 NQ; 而在点 (x_0, y_0) 的全微分

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

则是切平面 PM_1MM_2 上相应的那一段增量 NM. 于是, Δz 与 $\mathrm{d}z$ 之差是 MQ 那一段，它的长度将随着 $\rho \to 0$ 而趋于零, 而且是较 ρ 高阶的无穷小量.

前页 后页 返回

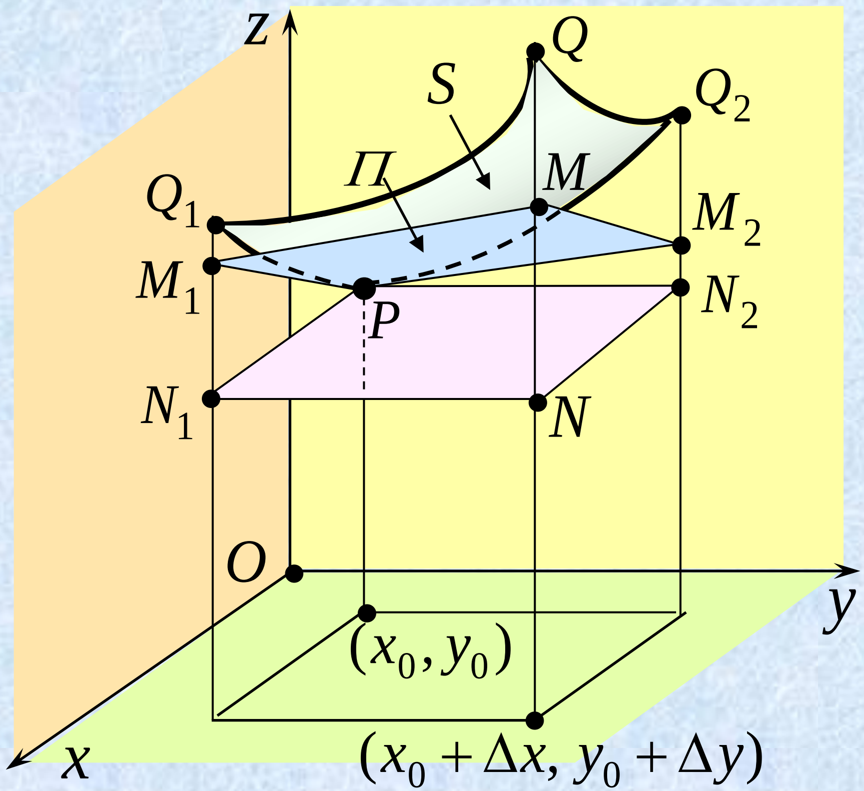


图 3

例6 试求抛物面 $z=ax^2+by^2$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程与法线方程，其中 $z_0=a{x_0}^2+b{y_0}^2$.

例7 求 $1.08^{3.96}$ 的近似值.

例8 应用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算某三角形的面积，现测得 $a=12.50, b=8.30, C=30^\circ$. 若测量 a,b 的误差为 ± 0.01，测量 C 的误差为 $\pm 0.1^\circ$，试求用此公式计算三角形面积时的绝对误差限和相对误差限.

小 结

1、多元函数全微分的概念；

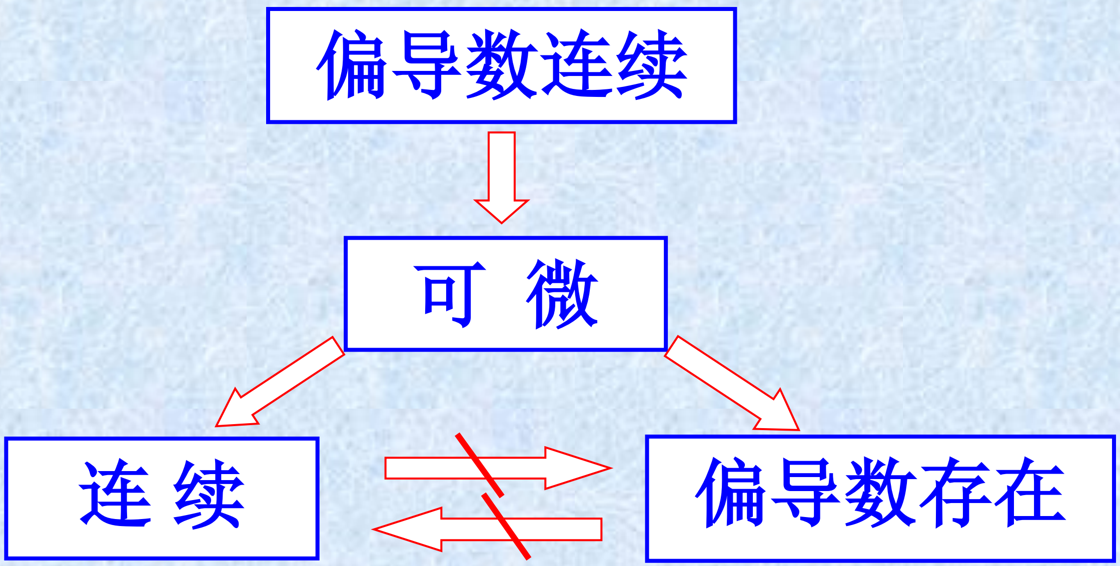
2、多元函数全微分的求法；

3、偏导数的定义:（偏增量比的极限）

4、偏导数的定义，偏导数的几何意义；

5、多元函数连续、偏导数存在、可微分的关系.

函数的连续性、偏导数的存在性、可微性和偏导数的连续性之间有如下关系:



§2 复合函数微分法

一、复合函数的求导法则

二、复合函数的全微分

一、复合函数的求导法则

设函数

$$x=\varphi(s,t) \text{ 与 } y=\psi(s,t) \qquad (1)$$

定义在 st 平面的区域 D 上, 函数

$$z=f(x,y) \qquad (2)$$

定义在 xy 平面的区域 $\overline{D}$ 上. 若

$$\{(x,y) \mid x=\varphi(s,t),\ y=\psi(s,t),(s,t)\in D\}\subset \overline{D},$$

则可构成复合函数:

$$z=F(s,t)=f(\varphi(s,t),\psi(s,t)),\ (s,t)\in D. \qquad (3)$$

前页 后页 返回

其中(1)为内函数, (2)为外函数, (x, y)为中间变量, (s, t)为自变量.

定理17.5 若 $x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微, $z=f(x,y)$在点 $(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$在点$(s,t)$ 可微，且关于 s 与 t 的偏导数分别为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\cdot\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\cdot\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\cdot\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\cdot\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}. \tag{4}$$

公式(4)也称为链式法则.

注 如果只是求复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 s 或 t 的偏导数, 则上述定理中 $x=\varphi(s,t),\ y=\psi(s,t)$ 只须具有关于 s 或 t 的偏导数就够了. 因为以 Δs 或 Δt 除(4)式两边, 然后让 $\Delta s\to 0$ 或 $\Delta t\to 0$, 也能得到相应的结果. 但是对外函数 f 的可微性假设是不能轻易省略的, 否则上述复合求导公式就不一定成立. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由 §1 习题 6 已知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. 若以 $f(x,y)$ 为外函数, $x=t,\ y=t$ 为内函数，则得到以 t 为自变量的复合函数

$$z=F(t)=f(t,t)=\frac{t}{2},$$

有 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\equiv\dfrac{1}{2}$. 若形式地使用法则 (4), 将得出错误结论:

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

$$=0\times 1+0\times 1=0.$$

这说明：在使用链式法则时，必须注意外函数可微这个条件.

一般地, 若 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微, 函数组

$$u_k=g_k(x_1,\cdots,x_n)\,(k=1,2,\cdots,m)$$

在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 具有对于 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数,

则复合函数

$$f(g_1(x_1,\cdots,x_n),g_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))$$

关于自变量 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

例 1 设 $z=\ln(u^2+v)$，而 $u=\mathrm{e}^{x+y^2}$，$v=x^2+y$，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

前页 后页 返回

例2 设 $u=u(x,y)$ 可微，在极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 之下，证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

例3 设 $z=uv+\sin t$, 其中 $u=\mathrm{e}^t, v=\cos t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

注 上面第一个等式中，左边的 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 是作为一元函数的复合函数对 t 求导数 (这种导数又称为“全导数”);

右边的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 是外函数 (作为 u, v, t 的三元函数) 对 t 求偏导数．二者所用的符号必须有所区别.

例4 用多元复合微分法计算下列一元函数的导数:

(1) $y = x^{x^{x}}$;　　　　(2) $y = \dfrac{(1+x^2)\ln x}{\sin x + \cos x}$.

说明 上面的解法是通过引进中间变量 y, z, u 后, 借助链式法则而求得的；上述过程还有一种比较简洁而实用的写法 (省去了引入中间变量):

$$\varphi'(x) = f_1 + f_2 \cdot [\, f_1 + f_2 \cdot (f_1 + f_2 \cdot 1)\,],$$

$$\varphi'(1) = f_1(1,1) + f_2(1,1) \cdot \{\, f_1(1,1)$$

$$+ f_2(1,1) \cdot [\, f_1(1,1) + f_2(1,1)\,]\}$$

$$= a + b[\, a + b(a+b)\,].$$

二、复合函数的全微分

若以 x, y 为自变量的函数 $z = f(x,y)$ 可微，其全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{5}$$

如果 x, y 作为中间变量，又是自变量 s, t 的可微函数

$$x = \varphi(s,t),\ y = \psi(s,t),$$

则由定理17.5 知道，复合函数 $f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$ 是可微的，其全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right). \quad (6)$$

由于 x, y 又是 (s, t) 的可微函数, 因此同时有

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t. \qquad (7)$$

将 (7) 式代入 (6) 式, 得到与 (5) 式完全相同的结果, 这就是多元函数的一阶 (全) 微分形式不变性.

必须指出, 在 (5) 式中当 x, y 作为自变量时, $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 各自独立取值; 当 x, y 作为中间变量时, $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 如 (7) 式所示, 它们的值由 $s, t, \mathrm{d}s, \mathrm{d}t$ 所确定.

利用微分形式不变性, 能更有条理地计算复合函数的全微分.

前页 后页 返回

例 5 设 $z = \mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$, 利用微分形式不变性计算 $\mathrm{d}z$, 并由此导出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

小 结

1、链式法则（分两种情况）

（特别要注意课中所讲的特殊情况）

2、全微分形式不变性（理解其实质）

§3 方向导数与梯度

一、方向导数的概念

二、方向导数与偏导数之间的关系

三、梯度的概念

一、方向导数的概念

定义1 设函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset \mathbb{R}^3$ 内有定义，$\vec{l}$ 为从点 P_0 出发的射线. 任给 $P(x,y,z)\in \vec{l}\cap U(P_0)$, 记 $\rho=|P_0P|$, 若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta_{\vec{l}}\, f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$$

存在, 则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数, 记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$, $f_{\vec{l}}(P_0)$ 或 $f_{\vec{l}}(x_0,y_0,z_0)$.

前页 后页 返回

不难看出：若 f 在点 P_0 存在对 x 的偏导数，则 f 在点 P_0 沿 x 轴正方向的方向导数恰为

$$f_{\vec{l}}(P_0) = f_x(P_0) \quad (\vec{l} = +\overrightarrow{Ox});$$

当 $\vec{l}$ 的方向为 x 轴的负方向时，则有

$$f_{\vec{l}}(P_0) = -f_x(P_0) \quad (\vec{l} = -\overrightarrow{Ox});$$

对于 f_y 与 f_z 也有相应的结论.

二、方向导数与偏导数之间的一般关系

定理17.6 若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 f

在点 P_0 沿任一方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在，且

$$f_{\vec{l}}(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

为 $\vec{l}$ 的方向余弦.

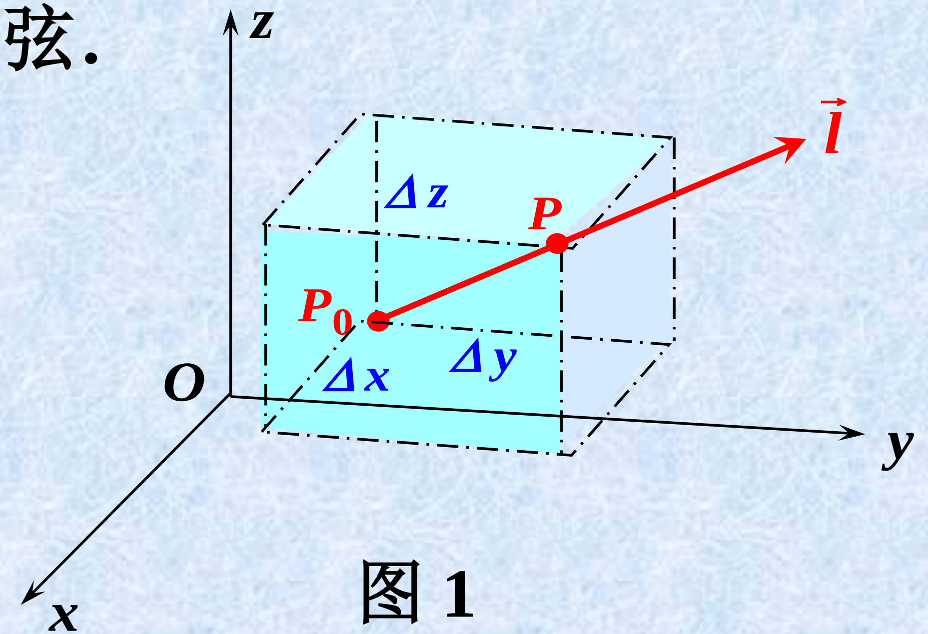


图 1

前页 后页 返回

对于二元函数 $f(x,y)$ 来说,

$$f_{\vec{l}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 α,β 是 $\mathbf{R}^2$ 中向量 $\vec{l}$ 的方向角.

例 1 设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$, 求 f 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿着指向点 $P_1(3,-1,2)$ 方向的方向导数.

例2 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty \text{ 时},\\ 0, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

前页 后页 返回

已知它在原点不连续 (当然也就不可微). 但在始于原点的任何射线上, 都存在包含原点的充分小的一段，在这一段上 f 的函数值恒为零.

于是由方向导数定义，在原点处沿任何方向 $\vec{l}$ 都有 $f_{\vec{l}}(0,0)=0.$

注 (i) 函数在一点可微是方向导数存在的充分条件而不是必要条件;

(ii) 函数在一点连续同样不是方向导数存在的必要条件，当然也不是充分条件.

三、梯度的概念

定义 2 若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在对所有自变量的偏导数，则称向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的梯度，记作

$$\mathrm{grad}\ f(P_0)=(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)).$$

在定理17.6 的条件下，若记 $\vec{l}$ 方向上的单位向量为

$$\vec{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

则方向导数计算公式 (1) 又可写成

$$f_{\vec{l}}(P_0)=\mathrm{grad}\ f(P_0)\cdot\vec{l}_0=|\mathrm{grad}\ f(P_0)|\cos\theta.$$

这里 θ 是梯度向量 $\mathrm{grad}\ f(P_0)$ 与 $\vec{l}_0$ 的夹角．因此，

当 $\theta=0$ 时，$f_{\vec{l}}(P_0)$ 取得最大值 $|\mathbf{grad}\ f(P_0)|$. 这就是说，梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模就是函数在该点的方向导数的最大值。

例3 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$，试求 f 在点 $P_0(2,-1,1)$ 处的梯度及它的模.

小结

1、方向导数的概念

（注意方向导数与一般所说偏导数的区别）

2、梯度的概念

（注意梯度是一个向量）

3、方向导数与梯度的关系

梯度的方向就是函数 $f(x,y)$ 在这点增长最快的方向. 梯度的模为方向导数的最大值。

§4 泰勒公式与极值问题

一、高阶偏导数

二、中值定理和泰勒公式

三、极值问题

一、高阶偏导数

由于 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 一般仍然是 x,y 的函数, 如果它们关于 x 与 y 的偏导数也存在, 说明 f 具有二阶偏导数. 二元函数的二阶偏导数有如下四种形式:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

类似地可以定义更高阶的偏导数，例如 $z=f(x,y)$

的三阶偏导数共有八种情形:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f_{x^3}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}=f_{x^2 y}(x,y),$$

$$f_{xyx}(x,y),\quad f_{xy^2}(x,y),\quad f_{y^3}(x,y),$$

$$f_{y^2 x}(x,y),\quad f_{yxy}(x,y),\quad f_{yx^2}(x,y).$$

例1 求函数 $z=\mathrm{e}^{x+2y}$ 的所有二阶偏导数和 $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

例2 求函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 的所有二阶偏导数.

注意　在上面两个例子中都有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

即先对 x、后对 y 与先对 y、后对 x 的两个二阶偏导数相等 (称这种既有关于 x, 又有关于 y 的高阶偏导数为混合偏导数). 但是这个结论并不对任何函数都成立，例如函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在点 (0,0) 关于 x 和 y 的两个不同顺序的混合偏导数:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

由此看到, 这两个混合偏导数与求导顺序有关.

定理 17.7 若 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

注 1 若二元函数 $f(x,y)$ 在某一点存在直到 n 阶的连续混合偏导数，则在这一点的所有 $m(m\le n)$ 阶混合偏导数都与求导顺序无关.

注2 这个定理对 n 元函数的混合偏导数也成立. 例如三元函数 $f(x,y,z)$ 的如下六个三阶混合偏导数

$$f_{xyz}(x,y,z),\ f_{xzy}(x,y,z),\ f_{yzx}(x,y,z),$$

$$f_{yxz}(x,y,z),\ f_{zxy}(x,y,z),\ f_{zyx}(x,y,z)$$

若在某一点都连续，则它们在这一点都相等.

复合函数的高阶偏导数 设

$$z = f(x, y),\ \ x = \varphi(s,t),\ \ y = \psi(s,t).$$

若函数 f, φ, ψ 都具有连续的二阶偏导数，则复合函数 $z = f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 对于 s, t 同样存在二阶连续偏导数. 具体计算如下:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

显然 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 仍是 s,t 的复合函数, 其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是 x, y 的函数, $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ 是 s, t 的函数. 继续求 z 关于 s, t 的二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial s}=\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}.$$

例3 设 $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

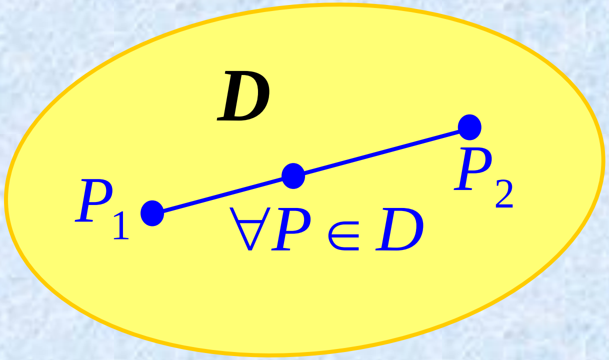
例 4 验证函数 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

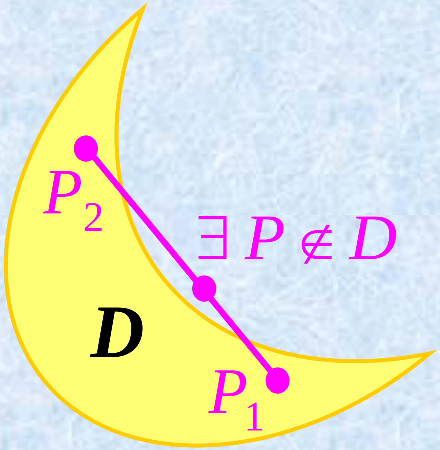
二、中值定理和泰勒公式

凸区域 若区域 D 上任意两点的连线都含于D，则称 D 为凸区域 (图17- 6). 这就是说，若 D 为凸区域，则对任意两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$，和一切 $\lambda(0 < \lambda < 1)$，恒有

$$P(\, x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\; y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\,) \in D.$$



凸



非凸

图 1

定理17.8（中值定理） 设 $f(x,y)$ 在凸区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 在 D 的所有内点都可微, 则对 D 内任意两点 $P(a,b), Q(a+h,b+k)\in \operatorname{int} D$, $\exists\,\theta(0<\theta<1)$,使得

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k. \tag{1}$$

注 若 D 为严格凸区域，即 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$, $\forall\lambda(0<\lambda<1)$, 都有

$$P(\,x_1+\lambda(x_2-x_1),\ y_1+\lambda(y_2-y_1)\,)\in \operatorname{int} D,$$

则对 D 上连续、int$D$ 内可微的函数 f ,只要 $P,Q\in D$, 也存在 $\theta\in(0,1)$，使 (1) 式成立.

例如, f 在闭圆域 D 上连续, 在 $\operatorname{int} D$ 内可微, 则必有 (2) 式成立. 倘若 $D=[a,b]\times[c,d]$, 那就不能保证 (2) 式成立 .

推论 若函数 f 在区域 D 上存在偏导数，且

$$f_x = f_y = 0,$$

则 f 在区域 D 上为常量函数.

定理17.9 (泰勒定理) 若 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数, 则对 $U(P_0)$ 内任一点 (x_0+h, y_0+k), $\exists\, \theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x_0+h, y_0+k)= f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n, \qquad (2)$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0,y_0)h^i k^{m-i}$$

$$(m=1,2,\cdots,n),$$

而首项 $f(x_0,y_0)$ 也可看作 $m=0$ 的情形.

(2) 式称为 f 在点 P_0 的 n 阶泰勒公式, 并称其中 R_n 为该泰勒公式的余项.

注 1 前面的中值公式正是泰勒公式在 $n=0$ 时的特殊情形.

注 2 若在 (2) 式中只要求 $R_n = o(\rho^n)$ ($\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$),

则仅需 f 在 $U(P_0)$ 内存在 n 阶的连续偏导数即可,

此时的 n 阶泰勒公式可写作

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0, y_0) + o(\rho^n).$$

例 5 求 $f(x, y) = x^y$ 在点 (1,4) 的泰勒公式 (到二阶为止), 并用它计算 $1.08^{3.96}$.

前页 后页 返回

三、极值问题

定义 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 若 $\forall P(x,y)\in U(P_0)$，满足

$$f(P)\le f(P_0)\ (\text{或 } f(P)\ge f(P_0)),$$

则称 f 在点 P_0 取得极大(或极小)值, 点 P_0 称为 f 的极大(或极小)值点. 极大值、极小值统称极值; 极大值点、极小值点统称极值点.

注意 这里讨论的极值点只限于定义域的内点.

前页 后页 返回

例 6 设 $f(x,y)=2x^2+y^2$，$g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$h(x,y)=xy$. 由定义知道，原点 (0,0) 是 f 的极小值点，是 g 的极大值点，但不是 h 的极值点. 这是因为 $\forall(x,y)$，恒有 $f(x,y)\geq f(0,0)=0$；又 $\forall(x,y)\in\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$，恒有 $g(x,y)\leq g(0,0)=1$；对于 h，在原点的任意小邻域内，既含有使 $h(x,y)>0$ 的点（Ⅰ、Ⅲ 象限），又含有使 $h(x,y)<0$ 的点（Ⅱ、Ⅳ 象限），所以 $h(0,0)=0$ 既不是极大值也不是极小值 ($z=xy$ 的图像是一马鞍面, (0,0,0) 为其鞍点).

前页 后页 返回

定理17.10 (极值的必要条件) 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数, 且在 P_0 取得极值, 则必有

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=0.$$

反之, 若函数 f 在点 P_0 满足 (16), 则称点 P_0 为 f 的**稳定点**.

上述定理指出: 偏导数存在时, **极值点必是稳定点.**

但要注意: **稳定点并不都是极值点.** 此外, 多元函数在偏导数不存在的点处也可能取得极值.

例如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点没有偏导数, 但 $f(0,0)=0$ 显然是它的极小值.

为了讨论二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值的充分条件，我们假定 f 具有二阶连续偏导数，并记

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0},$$

称为 f 在点 P_0 的黑赛(Hesse)矩阵.

定理 17.11 (极值充分条件) 设 $f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内具有二阶连续偏导数，且 P_0 为 f 的稳定点，则有如下结论：

$$\left.\begin{array}{l} H_f(P_0)\text{为正定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{为极小值}, \\ H_f(P_0)\text{为负定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{为极大值}, \\ H_f(P_0)\text{为不定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{不是极值}. \end{array}\right\}$$

此定理的结论还有如下形式:

(i) 当 $f_{xx}(P_0) > 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, f 在 P_0 取得极小值;

(ii) 当 $f_{xx}(P_0) < 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, f 在 P_0 取得极大值;

前页 后页 返回

(iii) 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2)(P_0)<0$ 时, f 在 P_0 不取极值;

(iv) 当 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2)(P_0)=0$ 时, 不能肯定 f 在 P_0 是否取得极值.

例7 求 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

例8 讨论 $f(x,y)=x^2+xy$ 是否存在极值.

例 9 讨论 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 在原点是否取得极值?

求函数在有界闭域上的最大值和最小值的方法:

需先求出在该区域上所有稳定点、无偏导数点处的函数值, 还有在区域边界上的这类特殊值；然后比较这些值，其中最大 (小)者即为问题所求的最大 (小) 值.

例10 证明：圆的所有外切三角形中, 以正三角形的面积为最小.

例11 (最小二乘法问题) 设通过观察或实验得到一列点 (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. 它们大体上在一条直线上，即大体上可用直线方程来反映变量 x 与 y 之间的对应关系 (参见图 2). 现要确定一直线，使得与这 n 个点的偏差平方之和为最小 (最小二乘方).

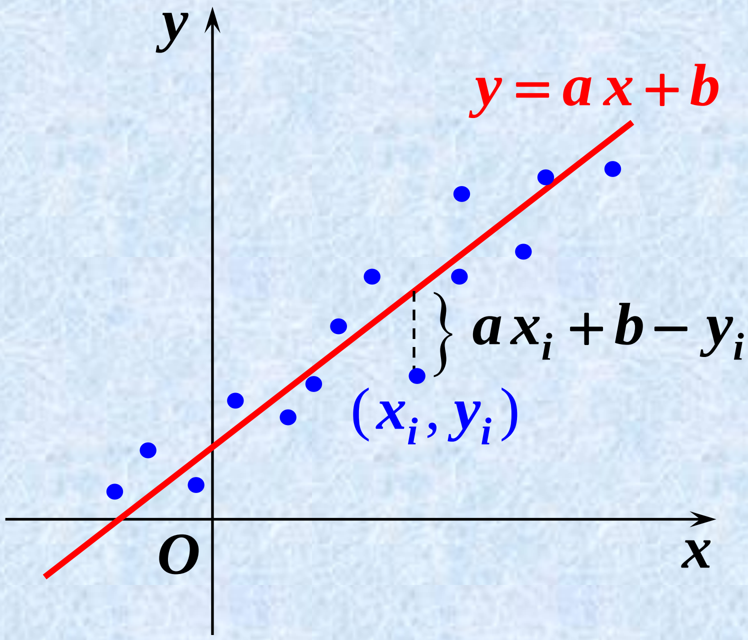


图 2

小　结

高阶偏导数 $\begin{cases} \text{纯偏导} \\ \text{混合偏导} \end{cases}$ （相等的条件）

中值定理和泰勒公式

多元函数的极值

（取得极值的必要条件、充分条件）

多元函数的最值 $\begin{cases} \text{无条件极值} \\ \Uparrow \\ \text{条件极值} \end{cases}$