§9.2　二重积分的计算

直角坐标系下二重积分的计算

极坐标系下二重积分的计算

一、 直角坐标系下二重积分的计算

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 就是以 D 为底以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = V$$

$D: a \le x \le b$

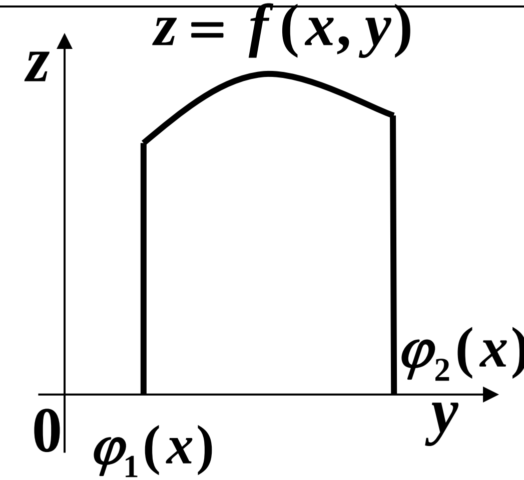
$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

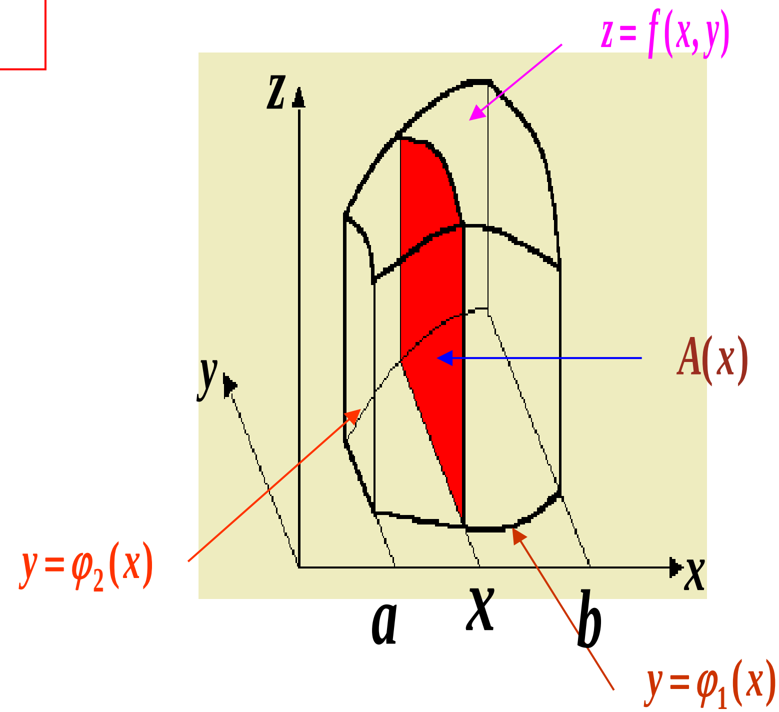
将曲顶柱体看作是平行截面体

$V = \{A(x): a \le x \le b\}$

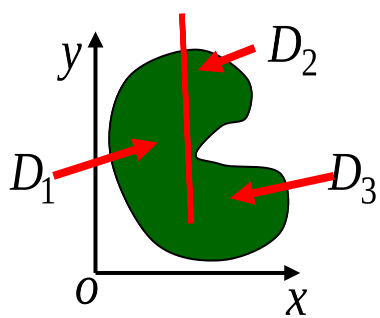
$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$





一、 直角坐标系下二重积分的计算

D是$X-$型区域	$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b$	$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$
D是$Y-$型区域	$\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c\le y\le d$	$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$
D既是$X-$型区域 又是$Y-$型区域	$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b$ $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c\le y\le d$	$\boxed{\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$ 交换积分顺序 使计算更简便
D既不是$X-$型区域 又不是$Y-$型区域	通过作辅助线将其分为$X-$型区域或$Y-$型区域.  	$\boxed{\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}}$

一、 直角坐标系下二重积分的计算

注记 1： 直角坐标下求二重积分的一般步骤

第一步：画出闭区域的几何草图求出有

关的交点坐标

第二步：确定闭区域的类型，写出个区域的

不等式表达式

第三步：利用公式将二重化为二次积分

第四步：利用定积分的性质定理进行计算

例 1 计算 $\iint\limits_D (x+2y)d\sigma$，其中 D 是由抛物线

$y=2x^2, y=1+x^2$ 所围成的闭区域

解：画出闭区域 D 的几何图形. 显然两抛

物线 $y=2x^2, y=1+x^2$ 的交点为 $(1,2),(-1,2)$

因此 D 是 $X-$区域：

$$-1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2$$

所以 $$\iint\limits_D (x+2y)d\sigma = \int_{-1}^{1}dx\int_{2x^2}^{1+x^2}\left(x+2y\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{2x^2}^{1+x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-3x^4-x^3+2x^2+x+1\right)dx=\frac{32}{15}$$

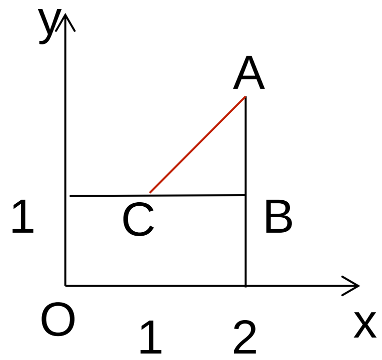
一、 直角坐标系下二重积分的计算

例 2 计算$\iint\limits_D xyd\sigma$，其中D是直线$y=1, x=2,$

$y=x$所围成的三角形闭区域

解：画出闭区域D的几何图形，显然直线

$y=1, x=2, y=x$的交点$A(2,2), B(2,1), C(1,1)$



（法 1）显然积分区域是$X-$区域

$$1\le x\le 2, 1\le y\le x.$$

因此 $\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy$.

$$=\int_1^2 \frac{x^3-x}{2}dx.$$

$$=\frac{9}{8}.$$

（法 2）显然积分区域是$Y-$区域：

$$1\le y\le 2, y\le x\le 2.$$

因此 $\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dy\int_y^2 xydx$.

$$=\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)dy$$

$$=\frac{9}{8}$$

课堂训练1–判断正误

（1）设**出闭区域**D**：** $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，则

$$\iint\limits_D \left(x^3+3x^2y+y^3\right)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1\left(x^3+3x^2y+y^3\right)dy$$

（2）设D**由两坐标轴及**直线$x+y=2$围成的闭区域，则

$$\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy$$

（3）设D**是顶点为**$(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$的闭三角形，则

$$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^{\pi} dy\int_0^{y} x\cos(x+y)dx$$

（4）设D**是由直线**$y=2, y=x, y=2x$围成的闭区域，则

$$\iint\limits_D \left(x^3+3x^2y+y^3\right)d\sigma=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}\left(x^3+3x^2y+y^3\right)dx$$

例 3 证明$\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$

分析（1）从左边看处区域 D 是 Y——型

区域: $-1\le y\le 2,\ y^2\le x\le y+2$

因此 **左边**$=\iint_D f(x,y)d\sigma$

（2） 右边第一部分$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$ 的积分

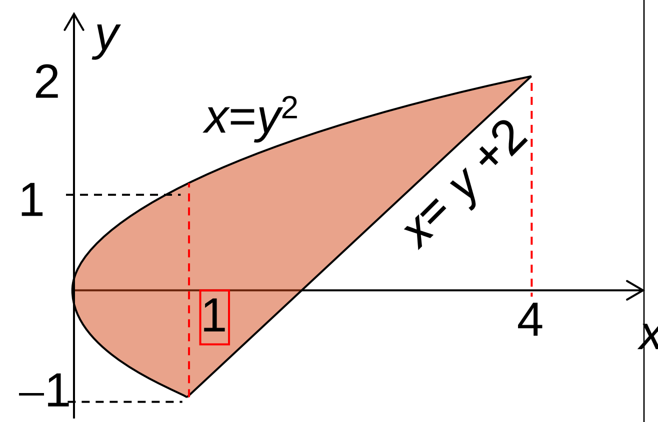
区域 $D_1:-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 1$是 X——型区域

右边第二部分$\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$的积分区域

$D_2:x-2\le y\le\sqrt{x},1\le x\le 4$也是 X——型区域

因此 右边$=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$

我们只需证明



$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$$

即 $D=D_1+D_2$

例 3　证明$\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$

证明：显然$\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$是以区域 D

$$-1\le y\le 2,\ y^2\le x\le y+2$$

以$f(x,y)$为积分函数的二重积分

画出积分区域区域 **D**：发现积分区域 **D**

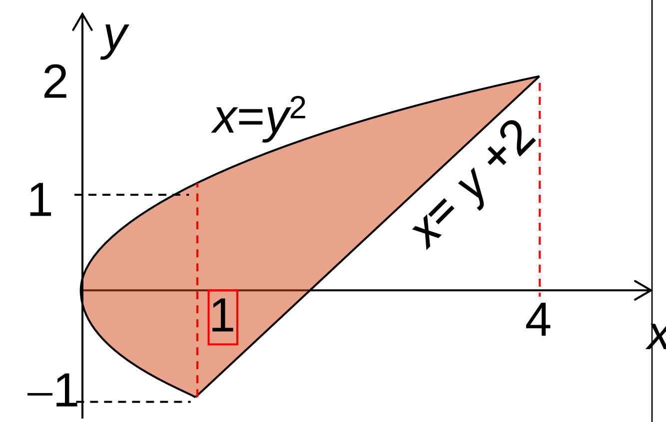
是$y=x^2, y=x-2$所围成的闭区域，显然它

们的交点为$(1,-1),(4,2)$所以经过交点$(1,-1)$

的直线$x=1$将闭区域D分成两部分D_1, D_2之和

$D_1: -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le 1$　$D_2: x-2\le y\le\sqrt{x}, 1\le x\le 4$

因此 左边$=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$



即　　　　　　左边=右边

（1）证明　$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

（2）改变积分$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$的次序。

例 4　计算$\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$

分析：

（1）显然$\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$等于函数$\frac{\sin y}{y}$在闭区域

$D: 0 \le x \le \pi, : x \le y \le \pi$上二重积分

（2）如图所示为D的几何图形. 显然D是由抛

物线$y=\pi$及直线$y=x, x=0$所围成的闭区域

（3）由于$\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$无法用初等函数表示出来

因此我们需要交换$\int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \frac{\sin y}{y} dy$的积分顺序.

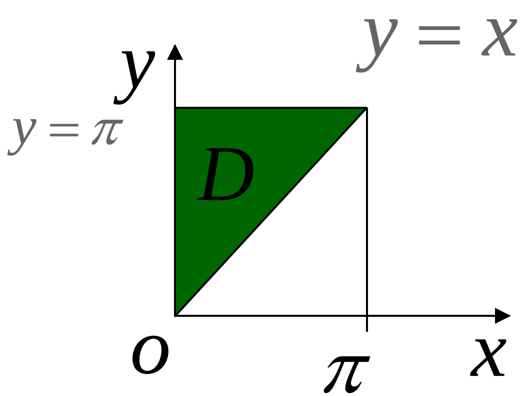
（4）显然 ***D*** 也是 **Y—型区域:**

$$0 \le y \le \pi, 0 \le x \le y$$

因此 $\int_0^{\pi} dy \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dx = \iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$

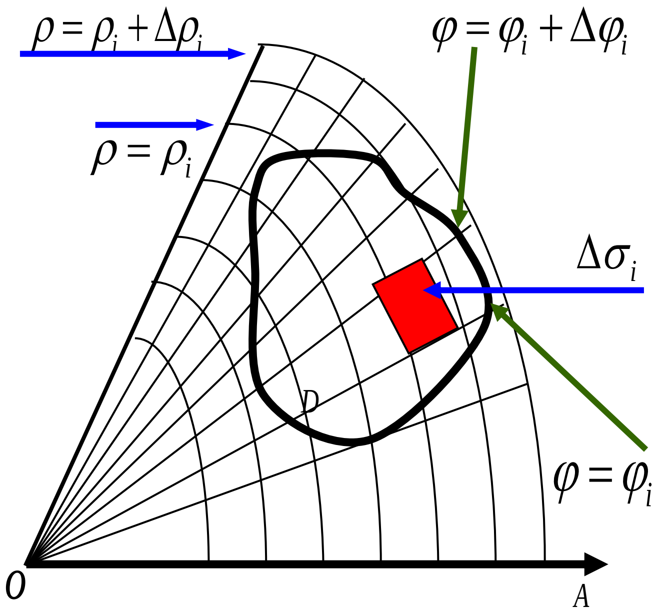
$$= \int_0^{\pi} dy \int_0^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin y dy = [\cos y]_0^{\pi} = -2$$



二、 极坐标系下二重积分的计算

在极坐标系下，如何计算
二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$



极坐标与直角坐标的关系

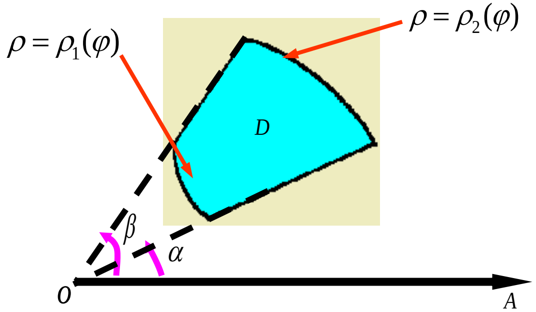
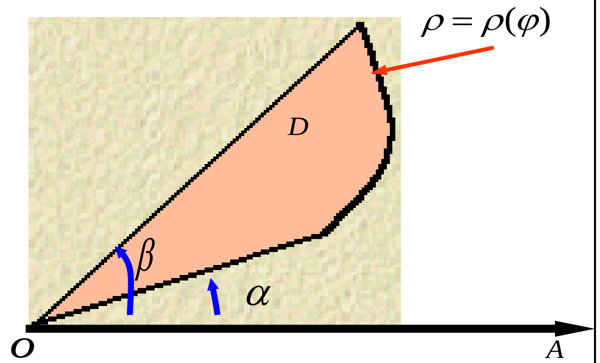
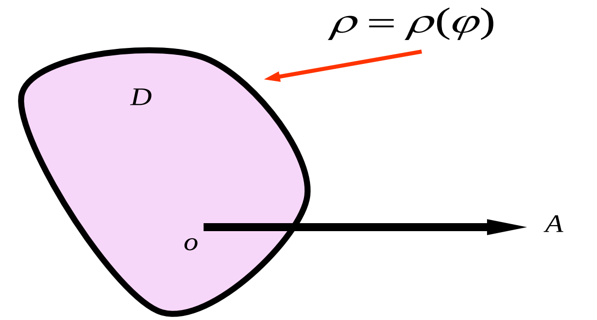
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$f(x,y)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

$$d\sigma=\rho d\rho d\varphi$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

二、 极坐标系下二重积分的计算

极点在积分区域闭区外	极点在积分区域闭区上	极点在积分区域闭区内
		
$\alpha\le\varphi\le\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)$	$\alpha\le\varphi\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\varphi)$	$0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le\rho(\varphi)$
$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$ $=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$	$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$ $=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$	$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$ $=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$

二、 极坐标系下二重积分的计算

注记 2 ：满足下列两条件可以考虑用极坐标计算法

（1）积分区域的边界方程用极坐标表示比较方便（圆形扇形圆环）

（圆形扇形、圆环 等）

（2）被积函数含有 x^2+y^2

如 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$， **D**： $x^2+y^2\le 4$

$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$ **D**： $a^2\le x^2+y^2\le b^2$

注记 3： 极坐标系下求二重积分的一般步骤

第一步：画出闭区域的几何草图

第二步：确定极半径及极角的

第三步：确定积分顺序

第四步：利用定积分的性质定理进行计算

例 5 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 **D** 为 $x^2+y^2\le a^2$

分析：（1）在直角坐标系下

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{-x^2-y^2}dy$$

$$=4\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{-y^2}dy$$

由于 $\int e^{-y^2}dy$ 无法用初等函数表示

因此上述方法行不通

（2）由于被积函数和积分区间都

出现了 x^2+y^2，故可以采用极坐标

解：将 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ 代入区域 D 中可得

$$D:\ 0\le\rho\le a,0\le\varphi\le 2\pi,$$

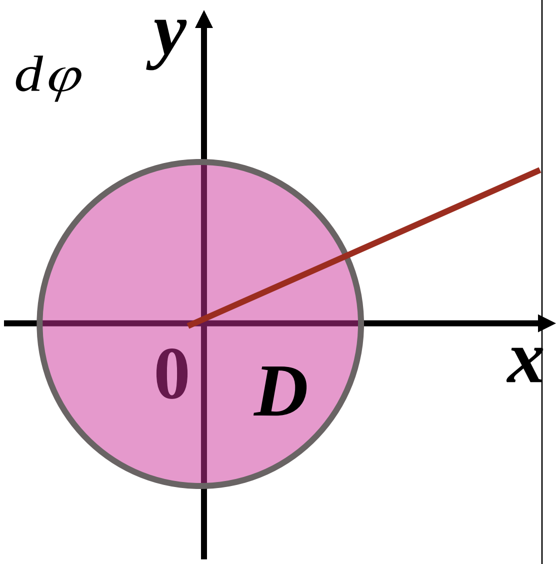
所以

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[e^{-\rho^2}\right]_0^a d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\pi(1-e^{-a^2})$$



课堂训练2-判断正误

（5）设出闭区域D：$x^2+y^2=4, x\geq 0$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^2 d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta$$

（6）设出闭区域D：$a^2\leq x^2+y^2\leq b^2$, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b d\rho\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta$$

（7）设出闭区域D：$x^2+y^2\leq 4$, 则

$$\iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right) dxdy=\int_0^1 \rho\ln\left(1+\rho^2\right)d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

(8) $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^a \rho^3 d\rho\int_{-\pi}^{\pi} d\theta$

部分考研真题

1（15 年，4 分）设 D **是第一象限内中曲线** $2xy=1,4xy=1$ **与直线** $y=x,y=\sqrt{3}x$ **围成的平面区域，函数** $f(x,y)$ **在** D **上连续，则** $\iint_D f(x,y)dxdy=$

$A:\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

$B:\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

$C:\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

$D:\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

2（16 年，10 分）已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta):2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$ **计算二重积分** $\iint_D xdxdy$