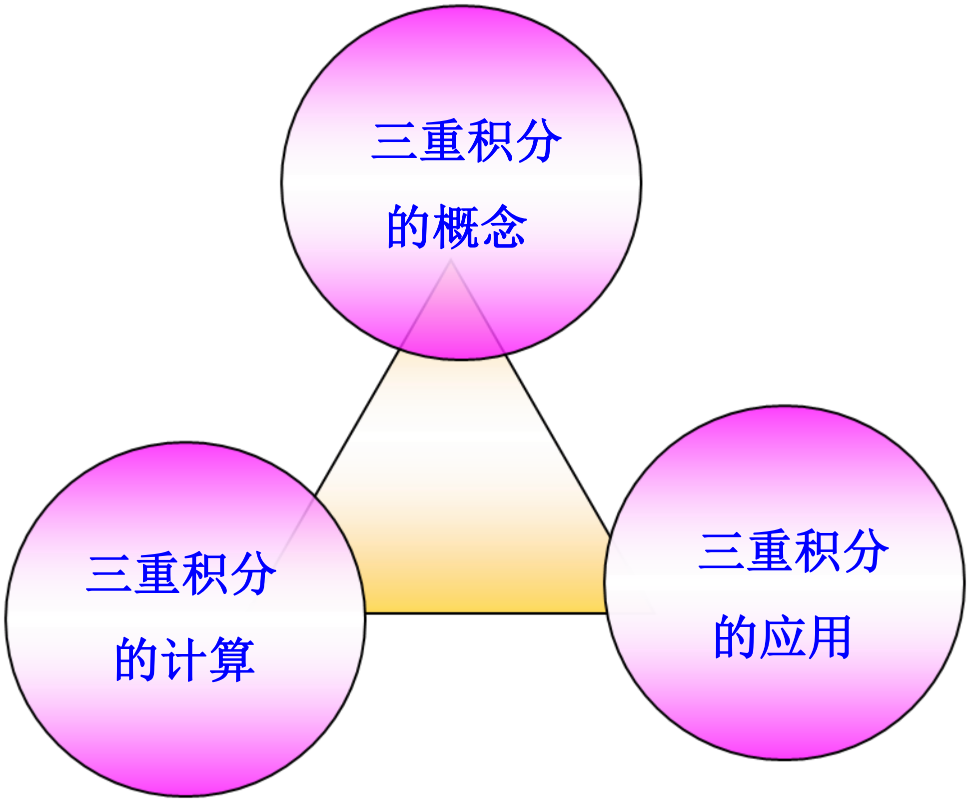
§9.4　三重积分



一、 三重积分的概念

1.背景: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质

密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$, 求分布在 Ω 内的物质的质量 M

求曲顶柱体体积的思路

（1）分割：用曲线网把 D 分成

n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$

（2）近似计算：用平顶柱体体积

近似表示小曲顶柱体的形的体积

即 $\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

（3）求和 $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

（4）取极限 $V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

求物质质量的思路

（1）分割：用曲线网把空间闭区域 Ω 分成

n 个小的空间闭区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$.

（2）近似计算：用均匀闭区域的物质的质量

近似表示小空间闭区域上物质的质量

即 $\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$

（3）求和 $M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$

（4）取极限 $M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$

一、 三重积分的概念

2. 三重积分的定义 设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数.

（1）将空间闭区域 Ω 任意分成 n 个空间小闭区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$. 其中 ΔV_i 表示第 i 个空间闭区域,也表示它的体积.

（2）在每个 ΔV_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$, 并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$.

（3）如果当 n 无限增大且各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和的极限总存在

则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$, 即

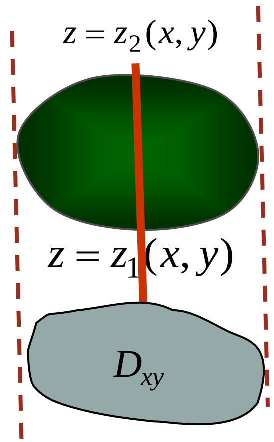
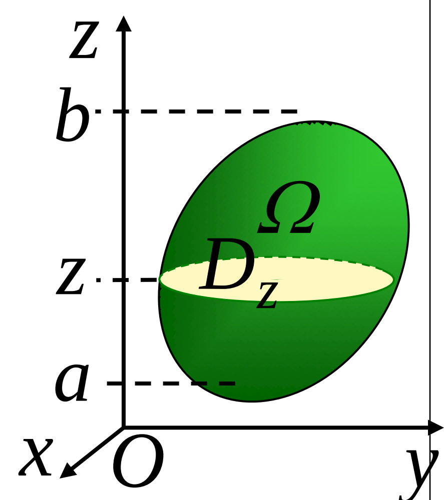
即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

Ω	$f(x,y,z)$	x,y,z	$f(x,y,z)dV$	dV	$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$
积分区域	被积函数	积分变量	被积表达式	体积元素	积分和

注记 1：三重积分具有与二重积分相似的性质

二、 三重积分的计算

直角坐标下的计算方法	
投影法（先一后二）	截面法（先二后一）
把积分区域Ω 投影到xoy坐标面上 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\\ (x,y)\in D_{xy}\end{cases}$  	把积分区域Ω 投影到z轴上 $\Omega:\begin{cases} (x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$ 
$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)dxdy$ $\xlongequal{记作}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$	$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$ $\xlongequal{记作}\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

截面法的适用范围：（1）被积函数只含一个变量；（2）截面面积易求。

二、 三重积分的计算

例1. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中Ω为三个坐标面及平面

$x+2y+z=1$所围成的闭区域 .

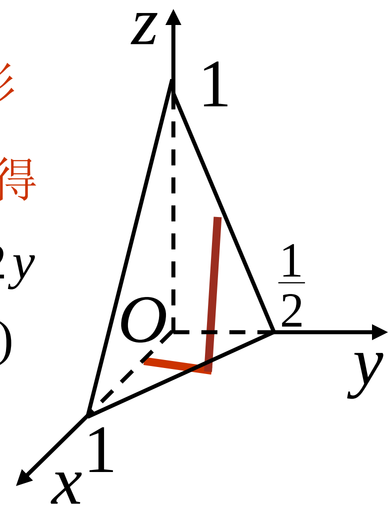
解：把积分区域Ω 投影

到xoy坐标面上，得

$\Omega: 0\le z\le 1-x-2y$

$0\le y\le \frac{1}{2}(1-x)$

$0\le x\le 1$



所以

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x \;=\frac{1}{48}$$

例2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

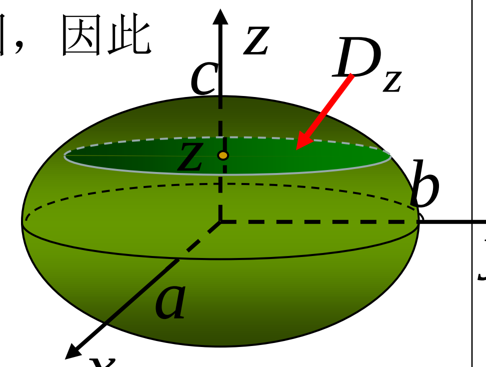
其中 $\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$

解：由于被积函数只有一个变量，因此用

平行于xoy的平面去截空间闭区域Ω

得到截面是一个椭圆，因此

$$\Omega:\begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}\end{cases}$$



所以

$$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-c}^{c} z^2\,\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}z \;=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

二、 三重积分的计算

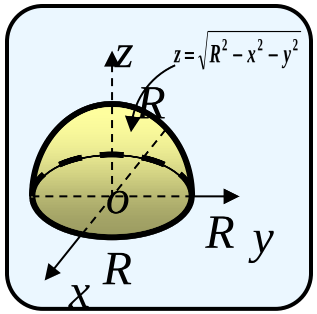
柱面坐标	柱面坐标下的计算方法
设$M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$,将x,y用极坐标ρ,φ代替, 则(ρ,φ,z)就称为点M的柱面坐标 **直角坐标与柱面坐标的关系**: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$
$\rho=$常数 → 圆柱面 $\varphi=$常数 → 半平面 $z=$常数 → 平　面	适用范围: （1） 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单 （2） 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离

二、 三重积分的计算

例3. 利用柱面坐标**计算** $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

其中Ω为半球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$

解：把积分区域Ω 投影到xoy坐标面上，得投影区域为半径为R的圆形闭区域



$$D:0\le\rho\le R, 0\le\varphi\le 2\pi$$

所以 $\Omega:0\le\rho\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\rho z\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

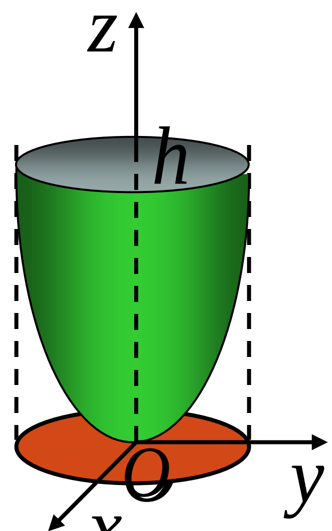
$$=\int_0^{2\rho}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z$$

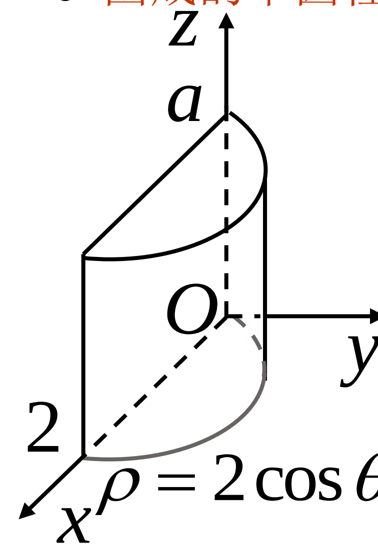
$$=\pi\int_0^R\rho(\rho^2-R^2)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}R^4$$

训练1：利用柱面坐标**计算** $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

其中Ω为柱面$x^2+y^2=4z$ 与平面面

$z=0, z=a\ (a>0), y=0$ 围成的半圆柱体





训练2：利用柱面坐标**计算** $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$

其中Ω为柱面$x^2+y^2=4z$ 与平面面

$z=h\ (h>0)$ 围成的闭区域

三、　三重积分的应用

空间中有 n 个质点，它们分别位于

$$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$$

处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$． 则该质点的重心的坐标为　对 x,y,z 轴的转动惯量为

物体占有空间区域 Ω 上的闭区域，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\mu(x,y,z)$（在 Ω 上连续）则物质的重心坐标及对 x 轴 y 轴 z 轴的转动惯量为

$\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$	$I_x=\sum_{i=1}^{n}m_i(y_i^{\,2}+z_i^{\,2})$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}V}$,	$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$
$\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$	$I_y=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i^{\,2}+z_i^{\,2})$	$\bar{y}=\dfrac{\iiint_\Omega y\mu(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}V}$	$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$
$\bar{z}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}z_km_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}$	$I_z=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i^{\,2}+y_i^{\,2})$	$\bar{z}=\dfrac{\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}V}$	$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$

三、 三重积分的应用

例 4 闭区域Ω为$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=2-x^2-y^2$围成，求Ω的形心.

分析：（1）显然 闭区域Ω是以 z 为轴的**旋转体，因此其形心一定在** z 轴上，即

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V}$$

（2）在柱面坐标下， 闭区域Ω是

$$\rho\le z\le 2-\rho^2,0\le\varphi\le 2\pi,0\le\rho\le 1$$

(3) $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{2-\rho^2}z\,\mathrm{d}$

(4) $\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{2-\rho^2}\mathrm{d}z$

例 5 求 Ω： $x^2+y^2+z^2\le a^2$对 z 的转动惯量其中球体的密度为μ

分析：（1）Ω对 z 的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mu\,\mathrm{d}V$$

（2）在柱面坐标下， 闭区域Ω是

$$-\sqrt{a^2-\rho^2}\le z\le\sqrt{a^2-\rho^2}$$

$$0\le\varphi\le 2\pi,0\le\rho\le a$$

(3) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mu\,\mathrm{d}V$

$$=\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{-\sqrt{a^2-\rho^2}}^{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}z$$

部分考研真题

1 (15 年，4 分) 设Ω是有平面$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域，则

$$\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2 (13 年，10 分) 设直线 L 过点$A(1,0,0), B(0,1,1)$两点，L绕 Z 轴旋转一周得到曲面$\sum$

$\sum$ 与平面$z=0, z=2$围成立体为Ω，

求（1）求曲面$\sum$ 的方程（2）求Ω的形心坐标