§9.3　二重积分的应用

- 体积的计　算
- 反常积分的计算
- 面积的计　算

一、 曲顶柱体体积的计算

回顾： 二重积分的几何意义

（1）如果 $f(x,y)\ge 0$， 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

就是曲顶柱体的体积.

（2）如果 $f(x,y)<0$，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

就是曲顶柱体的体积的负值.

（3）如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分是正的

在其余部分是负的，那么 $f(x,y)$ 在

D 上的二重积分等于 xoy 面上方的曲

顶柱体体积减去 xoy 面下方的曲顶柱

注记 1： 求曲顶柱体体积的一般步骤

第一步：画出曲顶柱体围成的几何草图

第二步:确定曲顶柱体的曲顶及区边表达式

第三步：写出曲顶柱体的表达式（利用对称性）

第四步：选择坐标系，确定积分区间

（1）区域边界应尽量多为坐标轴

（2）被积函数关于坐标变量易分离

第五步：确定积分顺序，并计算

（1）积分区域分块越少越好

（2）类此积分容易出算出

例 1 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱体 $x^2+y^2\le 2ax$ 的公共部分的体积.

分析：（1）画出几何草图

由对称性可知：所求立体的体积是

该立体在第一卦限部分体积的 4 倍

（2）找出曲顶柱体的曲顶表达式及区边

由 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 可知 $z^2\le 4a^2-x^2-y^2$

由 $x^2+y^2\le 2ax$ 可知 $y^2\le 2ax-x^2$

因此立体在第一卦限部分的曲顶为

$$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$$

因此立体在第一卦限部分的区边为

$$D: y=\sqrt{2ax-x^2},\ \ y=0$$

（3）写出曲顶柱体的表达式（利用对称性）

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,$$

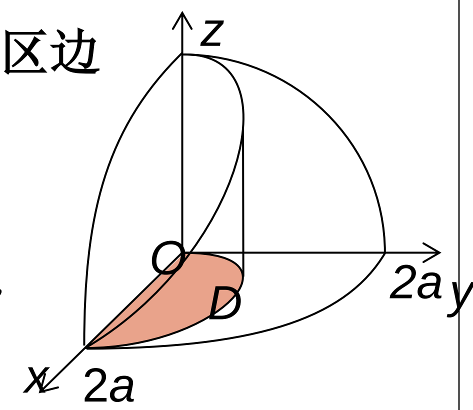
（4）选择坐标系（极坐标），确定积分区间

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$ 带入区边

表达式中可得

$$D:\ 0\le\rho\le 2a\cos\varphi,$$

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$



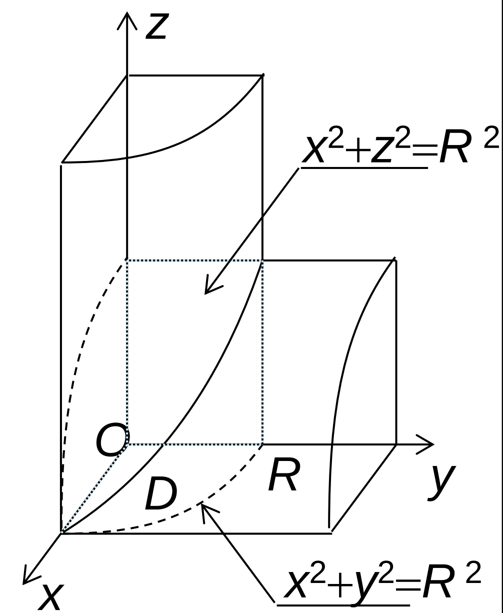
（5）确定积分顺序并计算

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho$$

例 2 求 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体的体积

解：（1）显然 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体关于三坐标面对称，



因此立体的体积是它在第一卦限部分体积的 8 倍

（2）$x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体在第一卦限部分

可以看做是以 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 为曲顶的柱体

（3）显然 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 在 xoy 面上四分之一的投影是一个圆

$0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}, 0\le x\le R$，所以 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体在第一卦限部分

的体积就是函数 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 在闭区域 $D: 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}, 0\le x\le R.$ 上的二重积分

因此所求立体的体积

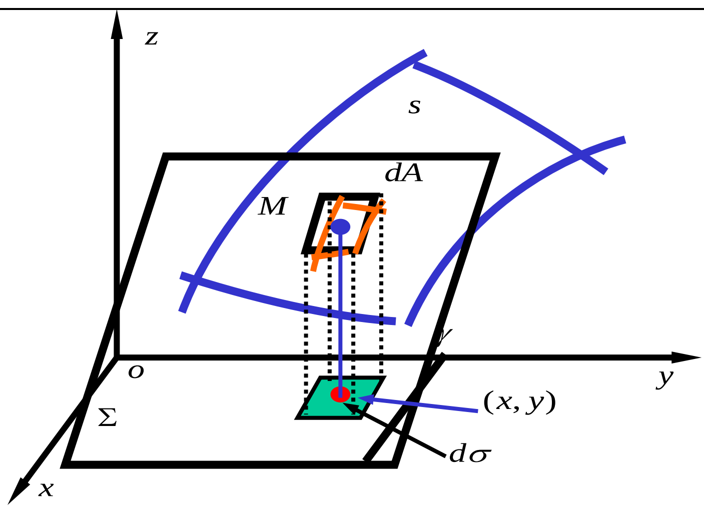
$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

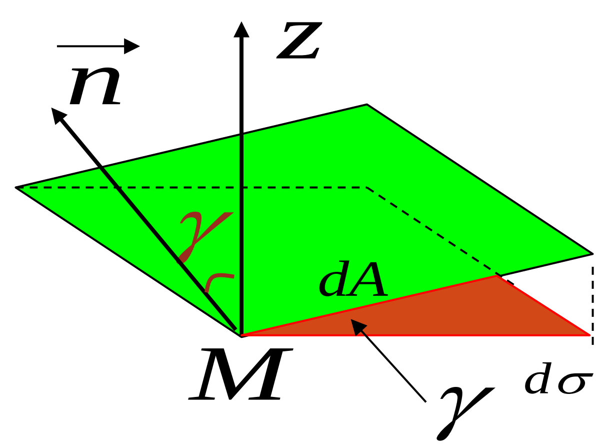
二、 曲面面积的计算

闭区域D的面积σ公式	
直角坐标系下	极坐标系下
$\sigma=\iint\limits_D d\sigma=\iint\limits_D dxdy$	$\sigma=\iint\limits_D d\sigma=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$
$D:\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b$ $\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$	$D:\alpha\le\varphi\le\beta,\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)$ $\sigma=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[\rho_2^2(\varphi)-\rho_1^2(\varphi)\right]d\varphi$
$D:\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d$ $\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dx=\int_\alpha^\beta[\psi_2(y)-\psi_1(y)]dy$	$D:\alpha\le\varphi\le\beta,0\le\rho\le\rho(\varphi)$ $\sigma=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^{\rho(\varphi)}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[\rho^2(\varphi)\right]d\varphi$

二、 曲面面积的计算

光滑曲面 $z=f(x,y)$ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy} 且 f_x', f_y' 在 D_{xy} 上连续	光滑曲面 $x=g(y,z)$ 在 yoz 面上的投影区域为 D_{yz} 且 g_y', g_z' 在 D_{yz} 上连续	光滑曲面 $y=h(z,x)$ 在 xoz 面上的投影区域为 D_{zx} 且 h_z', h_x' 在 D_{zx} 上连续
$dA=\dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,d\sigma$	$dA=\sqrt{1+g_y'^2+g_z'^2}\,d\sigma$	$dA=\sqrt{1+h_x'^2+h_z'^2}\,d\sigma$
$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy$	$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y'^2+g_z'^2}\,dydz$	$A=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1+h_x'^2+h_z'^2}\,dxdz$





二、 曲面面积的计算

回顾： 光滑曲面 $z = f(x, y)$ 在 xoy 面

上的投影区域为 D_{xy}

则该曲面的面积为.

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

注记 2：求曲面面积的一般步骤

第一步：画出几何草图（利用对称性）

第二步:确定曲面表达式 $z = f(x, y)$

第三步:确定曲面在坐标面上的投 D_{xy}

第四步:求出偏导数

第五步：代入曲面面积公式式

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

第六步：选择坐标系，确定积分区间

第七步：确定积分顺序，并计算

二、 曲面面积的计算

例 3 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的表面积

分析（1）球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 分为上下两半球面，由对称性可知所求的表面积**是**上球面的表面积的 2 倍

（2）写出上球面的方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

及它在 xoy 上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

（3）求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

判断 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$ **上是否连续**

在 D_{xy} 的边界：$x^2+y^2=a^2$ **上不连续.**

因此不能直接使用公式

（4） 取闭区域 D_1**：** $x^2+y^2\le b^2 (0<b<a)$ 为积分区域

显然 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 D_1 **上连续**

则闭区域 D_1 **上上半球面的表面积**

$$A_1=\iint_{D_1}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

则闭区域 D_{xy} **上球面的表面积**

$$A=2\lim_{b\to a^-}A_1$$