第九章 重积分及曲线积分

主要内容

- 二重积分及应用
- 三重积分及应用
- 曲线积分
- 曲面积分

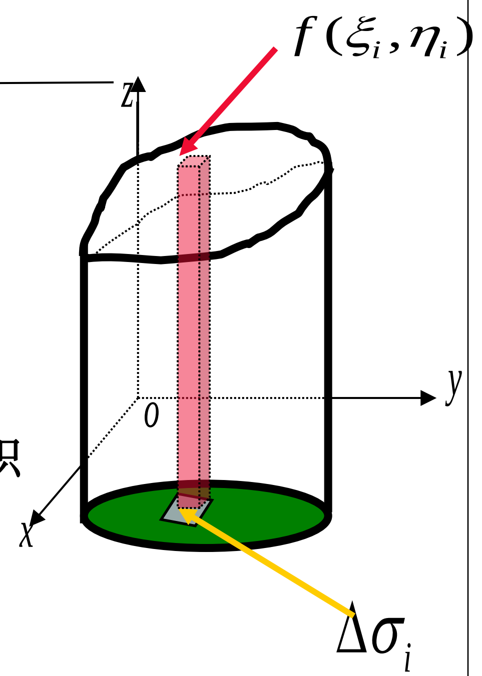
§9.1 二重积分的概念及性质

主要内容

- 概念产生的背景
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质
- 二重积分性质的应用

一、 二重积分概念产生的背景

设有一立体，它的底是 xoy 面上的闭区域 D. 它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面,它的顶是 $z=f(x,y)$ 曲面（$f(x,y)\ge 0$ 且在 D 上连续）这种立体叫做曲顶柱体. 问题 1：如何求曲顶柱体体积



求曲边梯形面积的思路

（1）分割：把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

（2）近似计算：用小矩形的面积近似表示小曲边梯形的面积

即 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

（3）求和 $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限 $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

求曲顶柱体体积的思路

（1）分割：把闭区域 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$

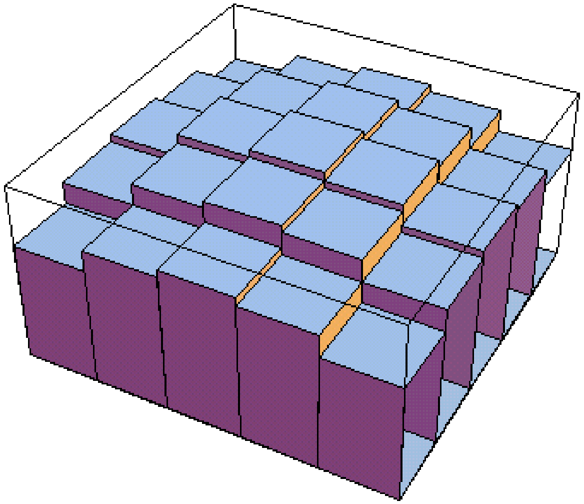
（2）近似计算：用平顶柱体体积近似表示小曲顶柱体的体积

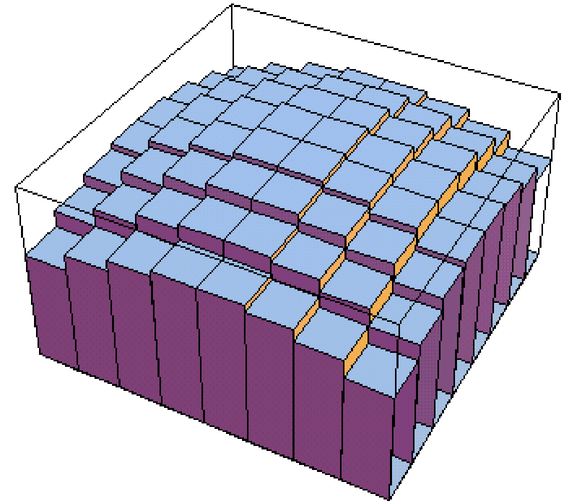
即 $\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

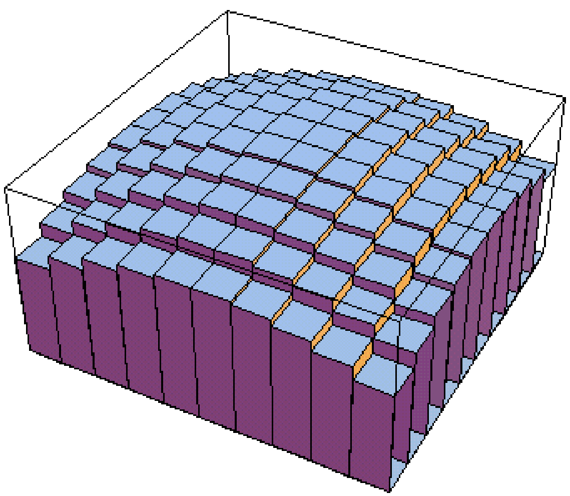
（3）求和 $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

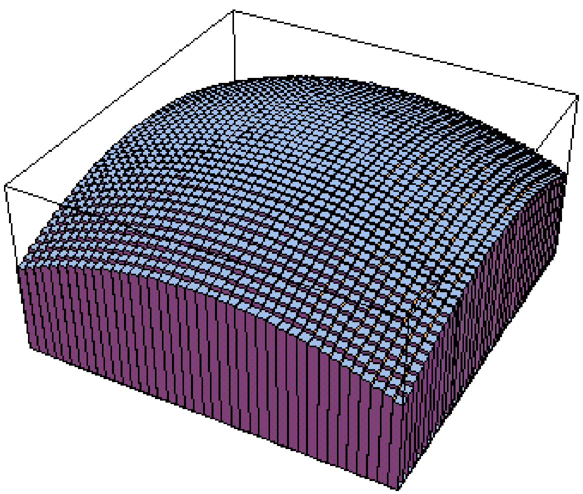
（4）取极限 $V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

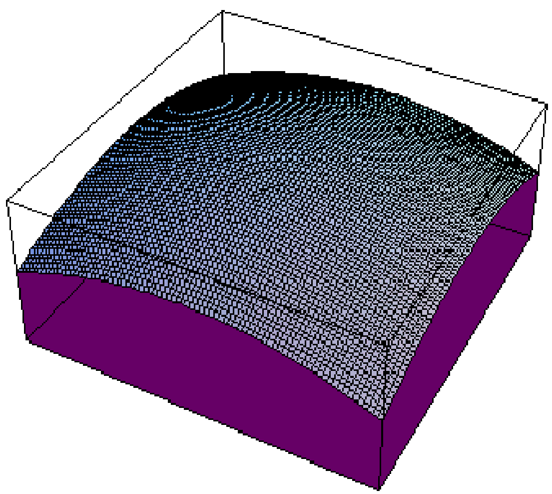
体积计算极限过程动画表现











二、 二重积分的概念

1. 二重积分的定义 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.

（1）将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$,…，$\Delta\sigma_n$ 其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域

也表示它的面积.

（2）在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

（3）如果当 n 无限增大且各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这和的极限总存在

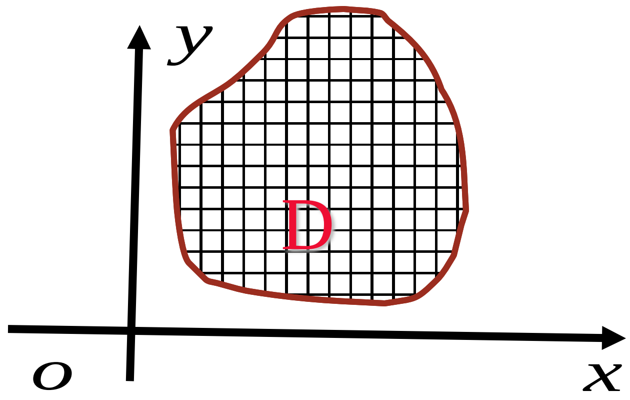
则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即

即
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

D 积分区域	$f(x,y)$ 被积函数	x,y 积分变量	$f(x,y)d\sigma$ 被积表达式	$d\sigma$ 面积元素	$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 积分和

二、 二重积分的概念

注记 1：二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 仅与被积函数和积分区域有关与区域 D 的分法及点的选择无关.



因此在直角坐标系中，有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dxdy$ 而把二重积分记作 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

注记 3： 当 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续时函数 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分必定存在.

注记 2 二重积分的几何意义

（1）如果 $f(x,y)\geq 0$，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 就是曲顶柱体的体积.

（2）如果 $f(x,y)<0$，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 就是曲顶柱体的体积的负值.

（3）如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分是正的在其余部分是负的，那么 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分等于 xoy 面上方的曲顶柱体体积减去 xoy 面下方的曲顶柱体体积的所得的差.

二重积分与一元函数的定积分的比较

二重积分的概念是一元函数定积分概念的推广（都是积分和的极限）

1. 二重积分的积分符号是$\iint$ 表示	定积分的积分符号用一个$\int$ 表示
2. 二重积分的积分区域是平面上的一个闭区域	定积分的积分区间是数轴上的一个闭区间
3. 二重积分的积分函数是一个二元函数	定积分的积分函数是一个一元函数
4. 二重积分的积分变量有两个	定积分的积分变量有一个
5. 二重积分的绝对值是一个曲顶柱体的体积	定积分的绝对值是一个曲边梯形的面积

三、二重积分的性质

类比定积分的性质	二重积分的性质
性质 1：$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	性质 1：$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$
性质 2：$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	性质 2：$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$
性质 3（积分区间的可加性） $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	性质 3（积分区域的可加性）如果积分区域 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$
性质 4 $\int_a^b 1\cdot dx = b-a$	性质 4 $\iint\limits_D 1\cdot d\sigma = \iint\limits_D d\sigma = \sigma$ （σ 为 D 的面积）.
性质 5（定积分的保号性）如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$	性质 5 (保号性)如果在区域D上，$f(x,y)\ge 0$ 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \ge 0$
推论 1 如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\le g(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$	推论 1 如果在闭区域D上，$f(x,y)\le g(x,y)$ 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$
推论 2 $\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert \le \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	推论 2 $\left\lvert\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right\rvert \le \iint\limits_D \lvert f(x,y)\rvert d\sigma$

三、二重积分的性质

类比定积分的性质	二重积分的性质
性质 6　如果 m,M 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上最小值和最大值，则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$,	性质 6　如果 m,M 是函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上最小值和最大值，则 $m\sigma\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma$, 其中，$\sigma$ 为 D 的面积.
性质 7 （积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$	性质 7 （积分中值定理）如果函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积.则在 D 上至少存在一个点 (ξ,η) 使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$

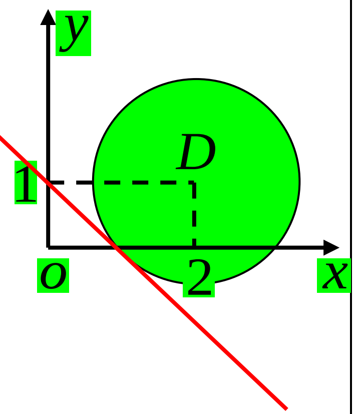
三、二重积分的性质

例 1：证明 $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$

$D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$

分析： 由推论 1 可知只需证明在区域 D 上

$(x+y)^2\le(x+y)^3$



（1）作出 D 的图形圆

（2）求出 D 与两坐标轴轴

交点 A$(1,0)$ 与 B$(0,1)$

（3）求出交点所在直线方程 $x+y=1$

（4）判断直线 $x+y=1$ 与圆 D 位置关系

即 $x+y=1$ 是圆 D 过 $(1,0)$ 的切线

也就是圆 D 在直线 $x+y=1$ 上方

（5）找出圆 D 上 $(x+y)\ge 1$

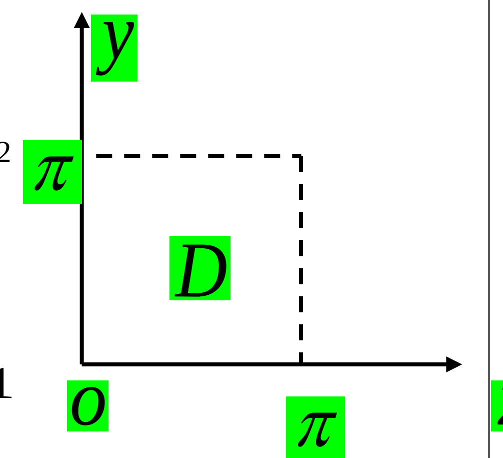
（6）找出圆 D 上 $(x+y)^2$ 与 $(x+y)^3$ 的关系

例 2：证明 $0\le\iint_D \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy\le\pi^2$

$D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi$

分析：由性质 6 可知，需要找出区域 D 的面积及

在区域 D 上 $\sin^2 x\sin^2 y$ 的最大值与最小值



（1）作出 D 的图形圆

（2）求出 D 的面积 $\sigma=\pi^2$

（3）证明在 D 上

$0\le\sin^2 x\sin^2 y\le 1$

（4）利用性质 6 证明结论

$0\cdot\pi^2\le\iint_D \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy\le 1\cdot\pi^2$

思考题：证明 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2}{3}\pi R^3$

$D:x^2+y^2\le R^2$