第二章　导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Ferma 在研究极值问题中提出

微积分学的创始人：Newton（英）Leibniz（德）

微分学
- **导数**——　描述函数变化快慢
- **微分**——　描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)

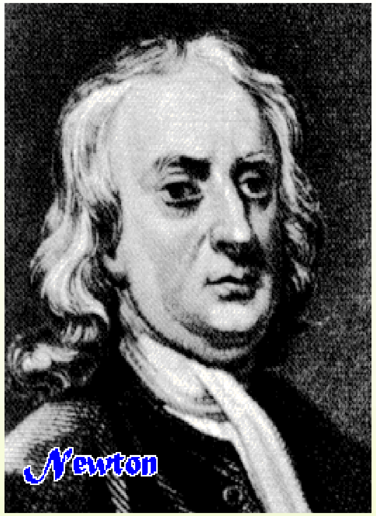
第二章　导数与微分

主要内容：

一、导数的概念

二、导数的运算法则

三、高阶导数



四、隐函数的导数以及由参数方程所确定的函数的导数

五、函数的微分

§2.1　导数的概念

主要内容：

- 与导数有关的概念
  - 导数的定义
  - 左右导数的定义
  - 导函数的定义
- 内在联系关系
  - 可导与左右可导关系
  - 可导与连续的关系

一、导数的定义

（1）背景：设一质点在坐标轴上作非匀速运动，时刻 t 质点的坐标为 s, s 是 t 的函数 $s=f(t)$, 求动点在时刻 t_0 的速度

分析：（1）动点在时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 内的平均速度

$$\boxed{\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}}$$

（2） 动点在时刻 t_0 的速度

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}}$$

一、导数的定义

（2）导数的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得增量Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时,相应地函数 y 取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	（1）如果Δy 与Δx 之比当$\Delta x\to 0$ 时的极限存在则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数记作 $y'\big\|_{x=x_0}$ $f'(x_0)$ $\frac{dy}{dx}\Big\|_{x=x_0}$, $\frac{df(x)}{dx}\Big\|_{x=x_0}$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
	（2）如果Δy 与Δx 之比当$\Delta x\to 0$ 时的极限不存在 则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导 （3）如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ 也称 $f(x)$在 x_0 处导数是无穷大.

一、导数的定义

注记 1：导数是函数的增量与自变量增量比的极限. 因此导数的表达形式可以由不同形式

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad ,$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

注记 2： 运动质点 $s=f(t)$在时刻 t_0 的瞬时速度为是 $v=s'\big|_{t=t_0}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$

注记 3：运动质点 $v=g(t)$在时刻 t_0 的瞬时加速度为是 $a=v'\big|_{t=t_0}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$

注记 4：$\boxed{f'(x_0)}$是 $y=f(x)$ 的图形在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率.

例 1：证明 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$处可导.

分析：（1）求出自变量的增量为Δx时函数值的增量Δy的表达式

（2）求出$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的表达式

（3）求出$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

证明：当自变量的增量为$\Delta x\neq 0$时函数值的增量

$$\Delta y = f(0+\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)\sin\frac{1}{\Delta x}$$

由于$\Delta x\to 0$时Δx是无穷小量，$\Delta x\neq 0$时$\sin\dfrac{1}{\Delta x}$有界，所以$\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}$是无穷小

故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$即$f(x)$在 在$x=0$处可导.

二、左右导数

（1）若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数,记作 $f_-'(x_0)$

即 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

（2）若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的右导数,记作 $f_+'(x_0)$

即 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定理 1：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左右导数存在且相等

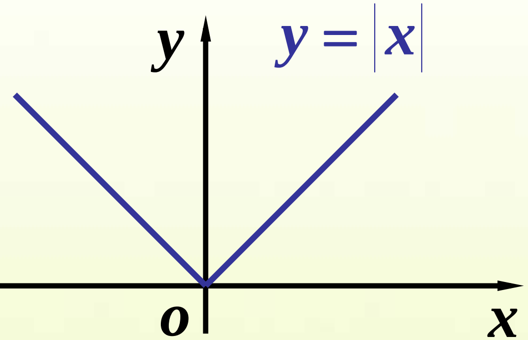
注记 5：（1）若 $f_-'(x_0)$，$f_+'(x_0)$ 存在但不相等，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导

（2）若 $f_-'(x_0)$, $f_+'(x_0)$ 至少有一个不存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导

例 3：讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性

分析：由于 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$，因此需要用左右导数来判断 $f(x)$在$x=0$处的可导性

解：显然 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$， 所以



$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

因此 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$, 故 $\boxed{f(x)\text{在}x=0\text{处不可导.}}$

三、导函数

（1）如果对每一 $x\in(a,b)$，$y=f(x)$都有导数，即对每一 $x\in(a,b)$ 都有一个导数值与之对应，则得到一个函数，此函数叫 $f(x)$的**导函数**记为 $f'(x)$，$y'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

（2）如果对每一 $x\in(a,b)$，

$y=f(x)$都可导，

且 $f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 存在，

则称 $f(x)$在$[a,b]$上可导.

注记 6：$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}\neq\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$.

三、导函数

注记 7：用定义求导数 $f'(x)$ 的一般步骤：

第一步：求 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

第二步：求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

第三步：求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 4．求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解：（1）显然 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$

（2）所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

（3）故 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

三、导函数

例 5． 设函数 $f(x)=x^n$ (n 为正整数) 求 $f'(x)$

分析 （1）$\left(x+\Delta x\right)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}\left(\Delta x\right) + C_n^2 x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \cdots + C_n^k x^{n-k}\left(\Delta x\right)^k + \cdots + \left(\Delta x\right)^n$

$$\Delta y = [(x+\Delta x)^n - x^n] = [nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n]$$

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$

（3）$\lim\limits_{\Delta x\to 0} C_n^2 x^{n-2}(\Delta x) = \cdots = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1} = 0$

所以

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

三、导函数

一般地： $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$（$\mu$为常数）

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

三、导函数

例 6．证明 $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

证明 ：由三角公式可得 $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

故 $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\cos(x+t) = \cos x$

同理可证 $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

例 7. 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

分析 （1） $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$

由于 $N=e^{\ln N}\Rightarrow a^{\Delta x}=e^{\ln a^{\Delta x}}=e^{\Delta x\ln a}\Rightarrow \Delta y==a^x(e^{\Delta x\ln a}-1)$

（2） $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^x(e^{\Delta x\ln a}-1)}{\Delta x}=a^x\dfrac{(e^{\Delta x\ln a}-1)}{\Delta x}$

由于当 $\beta\to 0$ 时， $e^{\beta}-1\sim\beta$. 当 $\Delta x\to 0$ 时， $\Delta x\ln a\to 0$ ，从而 $e^{\Delta x\ln a}-1\sim\Delta x\ln a$

（3） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a}$$

部分初等函数的的求导公式

（**1**） $(C)' = 0$

（**2**） $(\sin x)' = \cos x$.

（**3**） $(\cos x)' = -\sin x$.

⑷ $(a^x)' = a^x \ln a.$

⑸ $(e^x)' = e^x$

（6）$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$（μ为常数）

四、导数的应用

（1）用导数的定义求极限

例 8： 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{100}-x^{100}}{h}$

分析： 设 $f(x)=x^{100}$, 则 $\dfrac{(x+h)^{100}-x^{100}}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{100}-x^{100}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

解： 令 $f(x)=x^{100}$, $f'(x)=100x^{99}$ 由导数的定义可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{100}-x^{100}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=100x^{99}$$

四、导数的应用

（2）求曲线的切线及法线

例 9　求 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 的切线和法线方程

解：（1）由于 $y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}$

（2）由导数的几何意义知，$y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 的切线的斜率 $k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4$

（3）所求的切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$ 即 $4x+y-4=0$

（4）所求的法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$ 即 $2x-8y+15=0$

探究可导与连续的关系

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

极限与无穷小的关系

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\ (\alpha\to 0)$$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\ (\alpha\to 0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\right]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(x_0)\Delta x\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha\Delta x\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续

五、可导与连续的关系

定理 2：若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续	注记 7：在点 x_0 处连续的函数在点 x_0 处不一定可导 即连续是可导的必要条件，但不是充分条件.
	注记 8：若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导

五、可导与连续的关系

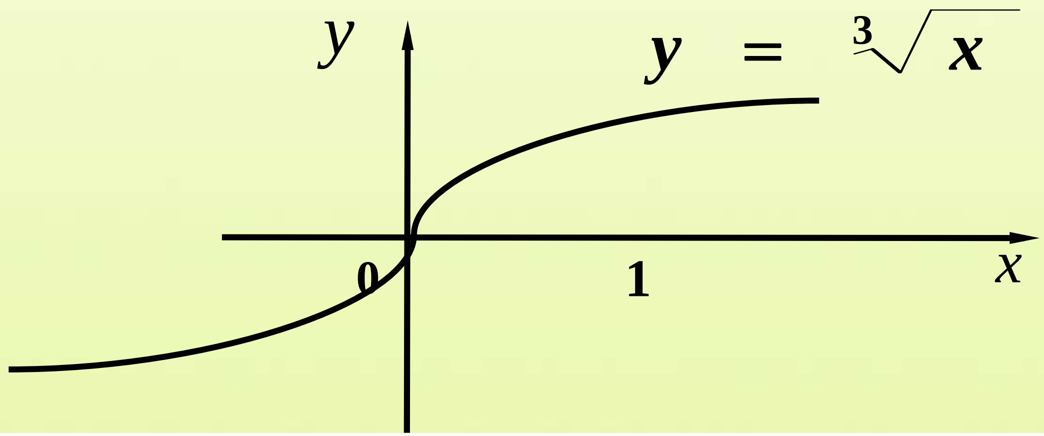
例 10．证明 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 连续但不可导

证明：显然 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 是基本初等函数，且 $x=0$ 是 $f(x)$ 定义域内一点，

（1）故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

（2）又 $\Delta x\neq 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\Delta x}\right)^2}$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，因此 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 不可导



§2.2 函数和积商的求导法则

主要内容

函数和的求导法则

函数积的求导法则

函数积的求导法则

求导法则的应用

一、函数和积商的求导法则

定理：如果函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导，则	注记1　两个函数都可导时，才有两
（1）函数$f(x)=u(x)\pm v(x)$在点x处可导，且 $\boxed{f'(x)=u'(x)\pm v'(x)}$	函数和（差）的导数等于导数之和（差）
（2）函数$f(x)=u(x)v(x)$在点x处可导，且 $\boxed{f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}$	注记2　两个函数积的导数不一定等于导数之积
（3）当$v(x)\neq 0$时，函数$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$在点x处可导，且 $\boxed{f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)}$	注记3　两个函数商的导数不一定等于导数之商
	注记4　$\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$

证明：如果函数$u(x)$，$v(x)$在点 x 处可导，函数 $f(x)=u(x)+v(x)$

在点 x 处也可导

设 $f(x)=u(x)+v(x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\left[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)+v(x)\right]$$

$$=\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]=\Delta u+\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

已知函数$u(x)$，$v(x)$在点 x 处可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$$

证明 2：如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x 处也可导

设 $f(x)=u(x)v(x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)]-[u(x)v(x)]$$
$$=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)$$
$$=(\Delta u)v(x+\Delta x)+(\Delta v)u(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)$$

已知函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$$

函数 $u(x)$， $v(x)$ 在点 x 处连续

$$\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)=u(x)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)\right]$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

一、函数和积商的求导法则

注记 5　定理（1-2)可以推广到有限个函数上	推论 1：如果函数$u(x)$在点x处可导，则函数$f(x)=\alpha u(x)$在点x处可导，且
（1）若函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$都在点$x$处可导，则 $f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$	$[\alpha u(x)]'=\alpha u'(x)$.
（2）若函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$都在点x处可导，则函数 $f(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)$ 在点x处可导，且 $(f_1 f_2 f_3)'=f_1' f_2 f_3+f_1 f_2' f_3+f_1 f_2 f_3'$	推论 2：设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$都在点$x$处可导，则 $f(x)=\alpha_1 u_1(x)+\alpha_2 u_2(x)+\cdots+\alpha_n u_n(x)$ 在点x处可导，且 $f'(x)=\alpha_1 u_1'(x)+\alpha_2 u_2'(x)+\cdots+\alpha_n u_n'(x)$

二、导数的运算法则的应用

例 1：证明$\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right)'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

证明：由求导法则及基本函数的求导公式可得

$$\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right)'=\left(a_0x^n\right)'+\left(a_1x^{n-1}\right)'+\cdots+\left(a_{n-1}x\right)'+\left(a_n\right)'$$

$$=a_0\left(x^n\right)'+a_1\left(x^{n-1}\right)'+\cdots+a_{n-1}\left(x\right)'+\left(a_n\right)'$$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

二、导数的运算法则的应用

例 2 设 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求 y'

解：由导数运算法则及基本初等函数的求导公式可得

$$y'=\left[e^x(\sin x+\cos x)\right]'$$

$$=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$

$$=2e^x\cos x$$

二、导数的运算法则的应用

例 3 设 $y=\tan x$， 求 y'

分析： （1）由于 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 是两个函数 $u=\sin x, v=\cos x$ 商的形式， 显然分子分母均可导.由两个函数商的导数运算法则可得

$$\boxed{y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}}$$

（2）利用求导公式求出函数的导数， 并化简

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \frac{1}{\cos x}=\sec x$$

二、导数的运算法则的应用

例 3　设 $y=\tan x$，求 y'

解：由导数运算法则及基本初等函数的求导公式可得

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即　$\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x}$

同理可得　$\boxed{(\cot x)'=-\csc^2 x}$

二、导数的运算法则的应用

例4　求 $y = \sec x$ 的导数 .

解　$y' = (\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$= \sec x \tan x.$$

即

$$\boxed{(\sec x)' = \sec x \tan x.}$$

同理可得

$$\boxed{(\csc x)' = -\csc x \cot x.}$$

部分初等函数的求导公式

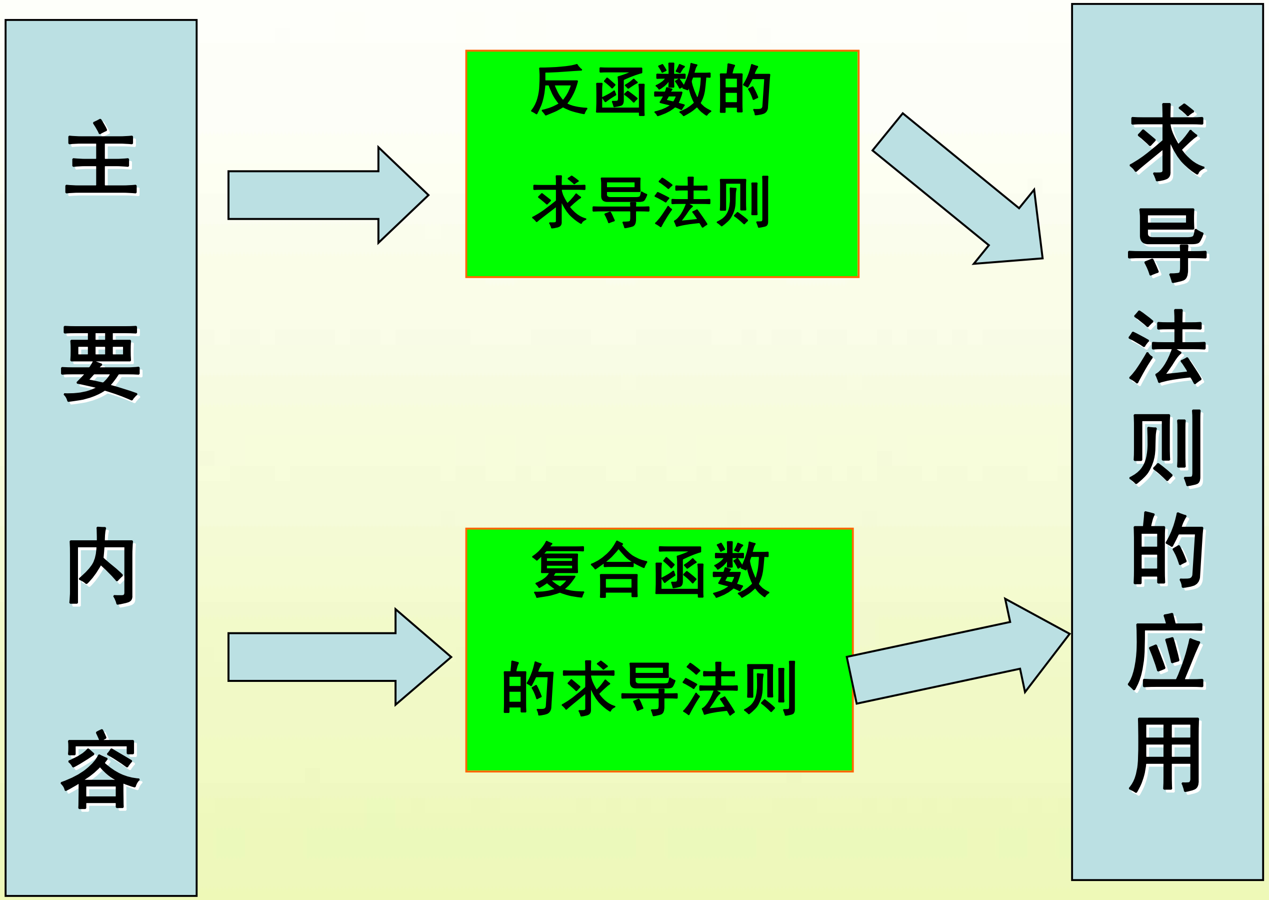
$$\boxed{(\tan x)' = \sec^2 x.}$$

$$\boxed{(\cot x)' = -\csc^2 x.}$$

$$\boxed{(\sec x)' = \sec x \tan x.}$$

$$\boxed{(\csc x)' = -\csc x \cot x.}$$

§2.3 反函数和复合函数的求导法则



§ 2.3 反函数和复合函数的求导法则

问题 1	本质
反三角函数在定义域内是否可导	若函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内可导
如果可导如何用简便的方法求	则满足什么条件它的反函数数
（1） $(\arcsin x)'$	$y=f(x)$
（2） $(\arccos x)'$	在区间
（3） $(\arctan x)'$	$I_x=\{x \mid x=\varphi(y), y\in I_y\}$
（4） $(\operatorname{arc}\cot x)'$	内是否也可导？
（5） $(\log_a x)' \quad (a>0, a\neq 1)$	

复　　习

若 $x=\varphi(y)$ 是定义在区间 I_y 上的单调连续的函数，则它的反函数 $y=f(x)$

必定存在，且在 $I_x=\{x\mid x=\varphi(y),y\in I_y\}$ 上也单调连续

函数在一点连续的等价定义：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，

若 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，　$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$

我们就说函数 $f(x)$ 在在点 x_0 连续.

探究 1 函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，它的反函数 $y=f(x)$ 在区间 $I_x=\{x\mid x=\varphi(y), y\in I_y\}$ 是否可导？

已知函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$

⇒ 函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、连续

⇓

反函数 $y=f(x)$ 在区间 $I_x=\{x\mid x=\varphi(y), y\in I_y\}$ 存在且单调连续

⇓

当 $\Delta x\neq 0$ **时，** $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$

$\Delta x\to 0$ 时必有 $\Delta y\to 0$

⇓

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$\varphi'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}\neq 0$$

⇓

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

一、反函数的求导法则

定理 1 若函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内

（1）单调

（2）可导且 $\varphi'(y)\neq 0$

则它的反函数 $y=f(x)$ 在区间

$$\boxed{I_x=\{x \mid x=\varphi(y), y\in I_y\}}$$

内 可导且有 $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}}$

即 $\boxed{y'_x=\dfrac{1}{x'_y}}$.或 $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$

注记 1 对原函数的要求是

（1）单调

（2）可导

（3）导数非零.

则（1）反函数可导

（2）且反函数的导数与原函数的导数互为倒数

反函数的导数问题总可以化归为原函数的导数问题

一、反函数的求导法则

注记 2：求反函数 $y=f(x)$ 导数的步骤

第一步：找出反函数的原函数 $x=\varphi(y)$

第二步：判断原函数 $x=\varphi(y)$ 在定义区间内单调可导并判断其导数

$x'_y=\varphi'(y)$ 在定义区间内非零

第三步：利用反函数的导数与原函数导数的关系得到反函数的导数

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

第四步：利用 $x=\varphi(y)$ 找出 $\varphi'(y)$ 与 x 的关系式.将该关系式代入

$f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ 即可得到用自变量 x 表示的反函数的导数

例 1： 求反正弦与反余弦函数的导数

解：（1）显然 $x=\sin y\quad(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2})$ 是 $y=\arcsin x$ 是的原函数（直接函数）

（2）由于 $x=\sin y$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调增加可导，且 $x'_y=\cos y\neq 0$，

所以在对应区间 $(-1,1)$ 内有

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}$$

（3）由于 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$，

因此

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$$

（4）

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$$

例2. 求反正切与反余切函数的导数

解： （1）显然 $x=\tan y \quad (|y|<\frac{\pi}{2})$ 是 $y=\arctan x$ 是的原函数.

（2）由于 $x=\tan y$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调可导，且 $x'_y=\sec^2 y\neq 0$，

（3）所以在相应区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$ 内

$$y'_x=(\arctan x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x}$$

（4） $$(\operatorname{arc}\cot x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctansin} x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

例3.　求对数函数的导数

解：显然 $x=a^y \quad (a>0, a\neq 1)$ 是函数 $y=\log_a x, x\in(0,+\infty)$ 是的直接函数

由于函数 $x=a^y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导且 $\left(a^y\right)'=a^y\ln a\neq 0$

因此函数 $y=\log_a x, x\in(0,+\infty)$ 可导，且

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

特别地

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}(x>0)}$$

部分基本初等函数的求导公式

（1） $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（4） $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

（2） $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（3） $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

（5） $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x} \quad (x>0)$

（6） $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$

二、复合函数的求导法则

问题 2 如何用简便的方法求 （1） $\left(\ln(-x)\right)'\ (x<0)$ （2） $(x^{\mu})'$	本质 （1）若 $u=g(x)$ 在点 x 可导 （2）$y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 处可导 那么复合函数 $y=f[g(x)]$ （1）是否可导？ （2）若可导 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=?$

探究 2 （1）若 $u=g(x)$ 在点 x 可导（2）$y=f(u)$在 $u=g(x)$处可导

复合函数 $y=f[g(x)]$ 是否可导？

已知 $y=f(u)$在 $u=g(x)$处可导

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u\to 0\text{时}，\ \alpha\to 0)$$

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$$

$u=g(x)$ 在点 x 可导

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$，　$u=g(x)$ 在点 x 连续

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$，**且** $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$，**且** $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u)g'(x)$$

二、复合函数的求导法则

定理 2 ： 设

（1） $u=g(x)$ 在点 x 可导

（2） $y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 处可导

则复合函数 $y=f[g(x)]$

（1） 在点 x 可导

（2） 其导 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u)\cdot g'(x)$

即 $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}}$

注记 2 ： 因变量对自变量求导等于因变量对中间变量求导乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

注记 3：复合函数的求导法则可推广到多个中间变量的情形.

设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$， 则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x\,.$$

二、复合函数的求导法则

注记 4：利用复合函数的求导法则求导数的思路：

（1）搞清复合函数的结构

（2）由外到内求导

（3）将中间变量代入

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{array}}$$

§二、复合函数的求导法则

例 3：求 $y=\ln(-x)$ **的导数**

解： $y=\ln(-x)$ **可以看做是函数** $y=\ln u,(u>0)$ **与** $u=-x,(x<0)$ **复合而成的**

函数.因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\times(-1)=-\frac{1}{u}=\frac{1}{x}$$

$$\left[\ln(-x)\right]'=\frac{1}{x}(x<0) \qquad \left[\ln x\right]'=\frac{1}{x}(x>0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\ln|x|\right]'=\frac{1}{x}(x\neq 0)$$

二、复合函数的求导法则

例 4：证明： $(x^{\mu})' = \mu\, x^{\mu-1} (x>0)$

分析：（1） $y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$ 可以看做是 $y = e^{v}$ 与 $v = \mu \ln x$ 复合而成的函数

（2）由求导法则及基本初等函数的求导公式可得 $\dfrac{dy}{dv} = e^{v}$， $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\mu}{x}$

（3）由复合函数的导法则可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^{v} \cdot \frac{\mu}{x} = x^{\mu} \cdot \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1} \qquad (x>0)$$

即

$$\boxed{(x^{\mu})' = \mu\, x^{\mu-1} (x>0)}$$

搞清复合函数结构，
由外向内逐层求导.

例5 求函数 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解：因为函数 $y = \ln\sin x$ 是函数

$$y = \ln u, u = \sin x.$$

复合而成的. 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

搞清复合函数结构，
由外向内逐层求导.

例 6 设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：（1）显然 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$ 分解为 $y=\ln u, u=\cos v, v=\mathrm{e}^x$

（2）由基本初等函数的求导公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{u},\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\sin v,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$$

（3）由复合函数的求导法则，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot\mathrm{e}^x=-\frac{\sin\mathrm{e}^x}{\cos\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan\mathrm{e}^x.$$

搞清复合函数结构，
由外向内逐层求导.

例 7　设 $y=\mathrm{e}^{arc\sin\sqrt{x}}$，求 y'.

解：$y'=(\mathrm{e}^{arc\sin\sqrt{x}})'=\mathrm{e}^{arc\sin\sqrt{x}}\cdot(arc\sin\sqrt{x})'$

$$=\mathrm{e}^{arc\sin\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{e}^{arc\sin\sqrt{x}}$$

例8 判断正误

（1）$(\sin 2^x)' = 2^x\left(\cos 2^x\right)\ln 2$

（2）$(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$

（3）$\left(\arctan x^2\right)' = \dfrac{2x}{1+x^4}$

（4）$\left(\ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]\right)' = \dfrac{1}{\ln\left(\ln x\right)} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\left(x\ln x\right)\ln\left(\ln x\right)}$

（5）$\left(f(x^2)\right)' = 2xf'(x^2)$

§2.4　高阶导数

主要内容

- 高阶导数的定义
- 高阶导数的运算法则

高阶导数的求法

一、高阶导数的定义

1.背景:	2. 定义:	类似地,	一般地
动点作变速直线运动其位置函数 $s=s(t)$，求动点在时间 t 加速度 $a=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$ $f(x)$称为零阶导数 $f'(x)$称为一阶导数.	若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数,记作 y''、$f''(x)$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, 即 $y''=(y')'$ $f''(x)=[f'(x)]'$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$	二阶导数的导数叫做三阶导数. 记作 y''', $f'''(x)$ 或 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ $y'''=(y'')'$ $f'''(x)=[f''(x)]'$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$	$n-1$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数记作 $y^{(n)}$ $f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ $\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

二、高阶导数的运算法则

定理 1：设函数$u(x),v(x)$都有n阶导数，则

$$\left[u(x)\pm v(x)\right]^{(n)}=\left[u(x)\right]^{(n)}\pm\left[v(x)\right]^{(n)}$$

$$\left[Cu(x)\right]^{(n)}=C\left[u(x)\right]^{(n)}$$（C 为常数）

$$\left[u(x)\cdot v(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[u(x)\right]^{(n-k)}\left[v(x)\right]^{(k)}$$

莱布尼兹公式

注记 3　求高阶导数的方法

方法一：逐阶求导法

方法二：归纳求导法

方法三：公式求导法--利用已知函数的高阶导数的公式及运算法则

三、高阶导数的求法

例 1 若函数 $f(x)$ 二阶可导，求 $y=\ln[f(x)]$ 的二阶导数

分析： 由于阶数较低，因此用定义**逐阶求导**(1) 求 y'（2）求 y''

解：显然函数 $y=\ln[f(x)]$ 是 $y=\ln u$ 与 $u=f(x)$ 复合而成的函数.

由于 $f(x)$ 二阶可导，所以函数 $y=\ln[f(x)]$ 一定可导. 由复合函数的求导法则可得

$$y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

根据二阶导数的定义及商的求导法则我们有

$$y''=[y']'=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{[f'(x)]'f(x)-f'(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

三、高阶导数的求法

利用归纳求导法求高阶导数的步骤

第一步：求出 1-3（或 1-4）阶的导数

第二步：观察 1-3（或 1-4）阶导数，

找出 1-3（或 1-4）阶导数表达式的规律

第三步：归纳出 n 阶导数，并加以证明

例 2　求 $\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^{(n)}$

分析　（1）设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$　求出 1–3 阶导数

$$y'=1\cdot a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$y'''=3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

（2）观察 1–3 阶导数，找出 1–3 阶导数的规律

$$y'=1!a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$y''=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$y'''=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

（3）由数学归纳法可得

$$y^{(n)}=n!a_n$$

三、高阶导数的求法

例 2 求 $\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^{(n)}$

解 设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

则

$$y'=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$y''=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$y'''=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

由数学归纳法可得 $y^{(n)}=n!a_n$

三、高阶导数的求法

同理可得

$$\boxed{\left(a^x\right)^{(n)} = a^x(\ln a)^n}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)^{(n)} = e^x}$$

$$\boxed{\left[x^\mu\right]^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}}$$

例 3　设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$

找规律

数学归纳法

$y=\sin x$

$y'=\cos x$ → $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=(y')'=-\sin x$ → $y''=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$

$y'''=\left(y''\right)'=-\cos x$ → $y'''=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

$\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$,$\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=-\sin x$, $\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x$

三、高阶导数的求法

例 3　设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$

解　显然 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=[y']'=-\sin x=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$$

$$y'''=[y'']'=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

由数学归纳法可得 $$\boxed{(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})}$$

同理可得 $$\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})}$$

例 4 设 $y=\dfrac{1}{1-x}$，求 $y^{(n)}$

$$y=\frac{1}{1-x}$$

找规律

数学归纳法

$$y'=-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'=\frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

$$y''=(y')'=-\frac{\left[(1-x)^2\right]'}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y''=\frac{2!}{(1-x)^{2+1}}$$

$$y'''=(y'')'=\frac{3\times 2}{(1-x)^4}$$

$$y'''=\frac{3!}{(1-x)^{3+1}}$$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

三、高阶导数的求法

例 4 设$y=\dfrac{1}{1-x}$，求 $y^{(n)}$

解 由求导法则及基本初等函数的求导公式可得 $y'=-\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$y''=\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]'=-\frac{\left[(1-x)^2\right]'}{(1-x)^4}=\frac{2!}{(1-x)^3}$$

$$y'''=\left[\frac{2!}{(1-x)^3}\right]'=\frac{3!}{(1-x)^4}$$

由数学归纳法可得 $y^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

同理可得 $\left[\dfrac{1}{1+x}\right]^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

三、高阶导数的求法

例 5 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$

$$y=\ln(1+x)$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$y'=\frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

三、高阶导数的求法

例 5 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$

解 显然 $y'=\dfrac{1}{(1+x)}$

又

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

所以

$$y^{(n)}=\left(y'\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

常见的高阶导数公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

常见的高阶导数公式

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}}$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{1-x}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

$$\boxed{[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

$$\boxed{\left[x^{\mu}\right]^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}}$$

例 6 求 $\left[\sin x+\cos x\right]^{(10)}\big|_{x=0}$

解：由高阶导数的运算法则可得

$$\left[\sin x+\cos x\right]^{(10)}=\left[\sin x\right]^{(10)}+\left[\cos x\right]^{(10)}$$

由公式$[\sin x]^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right),[\cos x]^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$可得

$$[\sin x]^{(10)}=\sin\left(x+\frac{10\pi}{2}\right)=-\sin x,[\cos x]^{(10)}=\cos\left(x+\frac{10\pi}{2}\right)=-\cos x$$

因此 $$\left[\sin x+\cos x\right]^{(10)}=-\sin x-\cos x$$

所以 $$\left[\sin x+\cos x\right]^{(10)}\big|_{x=0}=-\sin 0-\cos 0=-1$$

考研原题

（1）（10，4 分）函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ____________

（2）（07，4 分）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$ ，则 $y^{n}(0)=$ _____.

（3）（06，4 分）设函数 $f(x)$在$x=2$ 的某领域内可导, 且 $f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$, 则

$f'''(2)=$ __________

思考题

一、 判断正误

（1）设 $f(x)=2x^4$，则 $f''(0)=0$

（2）$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(4)}\Big|_{x=2}=24$

（3）$\left(2e^x-x\right)^{(10)}=2e^x$

（4）$\left(e^{2x-1}\right)''=4e^{2x-1}$

（5）$\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}\Big|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$

（6）$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'''\Big|_{x=0}=-1$

（7）$\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^{(n+1)}=0$

思考题

二、 填空题（将正确答案填写在括号内）

（1）设 $y=\ln\sin x$，则 $y''=$（ ）

（2）$\left(e^{x}\right)^{(10)}=$（ ）

（3）$\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=$ （ ）

（4）$\left(\dfrac{2x}{x^{2}-1}\right)^{(n)}=$（ ）

§2.5 隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数

主要内容

- 隐函数的导数
- 对数求导法
- 由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

1. 有关定义：

观察：（1） $y=x$ （2） $y=\sin x$ （3） $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

发现：表达式的特点是直接给出了由自变量 x 的取值求因变量的对应值 y 的规律 （计算式）

我们把用这种方式表达的函数称为显函数.

定义 1：形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数.

一、隐函数的导数

观察： $x+y^3-1=0$

发现：当自变量x在$(-\infty.+\infty)$内取值时，因变量y有唯一确定的值与之对应. 即方程$x+y^3-1=0$可以确定y是x的函数.

定义 2: 若方程$F(x,y)=0$可以确定y 是x的函数，我们把此函数称为隐函数.

即如果在方程$F(x,y)=0$中，当x取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的y值存在，那么就说方程$F(x,y)=0$在该区间内确定的函数称为隐函数

一、隐函数的导数

观察方程 $x+y^3-1=0$ 发现该方程确定的函数可以用式子 $y=\sqrt[3]{1-x}$ 表示

我们把隐函数化为显函数的过程叫做隐函数的显化

注记 1：并不是所有的隐函数都可以化为显函数

方程 $x+y^3-1=0$ 确定的隐函数可以显化 $y=\sqrt[3]{1-x}$

方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数很难显化

方程 $e^y+xy-e=0$ 确定的隐函数不能显化

当隐函数不易显化或不能显化时如何求导

一、隐函数的导数

注记 1：求隐函数的导数的思路

利用复合函数的求导法则直接对方称 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导. 其步骤为

第一步：对 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导数得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$

第二步：利用复合函数的求导法则由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$ 解出 y'

一、隐函数的导数

例 1. 求由方程$e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数y 的导数.

分析：（1）设由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数$y=y(x)$从而原方程

$$e^{y(x)}+x\cdot y(x)-e=0$$

（2）把方程两边的每一项对x求导数得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{y(x)}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy(x)]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e)=0$

（3）**函数**$z=e^{y(x)}$**可以看做是函数**$z=e^y,y=y(x)$复合而成的函数.因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{y(x)}\right)=z'_y y'_x=e^y y'$$

又 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy(x)]=x'\cdot y+xy'=y+xy',\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e)=0$$

所以 $$e^y\cdot y'+\left(y+xy'\right)=0$$

（4）整理化简得 $$y'=-\frac{y}{x+e^y},(x+e^y\neq 0)$$

一、隐函数的导数

例 1. 求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数.

解：把方程两边的每一项对 x 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(e^y\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(xy)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(e)=0$$

由复合函数的求导法则可得 $e^y \cdot y' + \left(y + xy'\right) = 0$

从而 $$y' = -\frac{y}{x+e^y},(x+e^y \neq 0)$$

一、隐函数的导数

例 2 求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在$(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程.

分析: （1）求出方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$确定的隐函数的导数$y'$

（2）求出过点$(2,\frac{3\sqrt{3}}{2})$的切线的斜率$k=y'\big|_{x=2}$

（3）写出过点$(2,\frac{3\sqrt{3}}{2})$的切线方程　　$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=k(x-2)$

一、隐函数的导数

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 把椭圆方程的两边分别对 x 求导得 $\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$

从而 $y'=-\frac{9x}{16y}$

将 $x=2$， $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 代入上式得所求切线的斜率 $k=y'\big|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

故所求的切线方程为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即 $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

一、隐函数的导数

例 3. 求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

分析: 由于阶数低，因此采用逐阶求导法

（1）求出由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定的隐函数的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

（2）根据 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ 求出二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

一、隐函数的导数

例 3. 求由方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

解: 方程两边对 x 求导，得 $1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}(\cos y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{2-\cos y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right) = 2\cdot\left[-\frac{(2-\cos y)'}{(2-\cos y)^2}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

一、隐函数的导数

课堂训练---判断正误

1. 由 $y^3+y-x=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的导数 $y'\big|_{x=0}=1$

2. $xy=e^{x+y}$ 在 $x\neq 1$ 所确定的隐函数的导数为 $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-1}$

二、对数求导法

学习隐函数的求导法则有何应用？

观察：	办法：先在方程两边取对数
（1） $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$	然后利用隐函数的求导方法求出导数.
（2） $y=x^{\sin x}$	适用范围：
	（1）多个函数相乘或商
发现：直接求导比较麻烦.	（2）幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

二、对数求导法

注记 2：对数法求函数 $y=(u(x))^{v(x)}$ 导数的步骤

第一步： 对 $y=(u(x))^{v(x)}$ 两边取对数，得 $\ln y = v(x)\ln u(x)$

第二步： 在 $\ln y = v(x)\ln u(x)$ 两边对 x 求导，利用复合函数的求导法则即可

二、对数求导法

例 4：求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数

解：两边取对数，得 $\ln y = (\sin x)\ln x$. 两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\cos x)\ln x + (\sin x)\cdot\frac{1}{x}$$

于是

$$y' = y\left[(\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[(\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

二、对数求导法

用对数求导法求函数 $y = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$ 的导数.

用对数求导法求函数 $y = \dfrac{f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)}{g_1(x) g_2(x) \cdots g_m(x)}$ 的导数.

第一步：对方程两边取对数，从而把积商的导数问题转化为和差的导数问题

第二步：利用复合函数的求导法则及对数函数的求导公式求出函数的导数

二、对数求导法

例 5. 求函数 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解：两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ \ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\ ]$$

两边同时对 x 求导得 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$

即

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

课堂训练

1. 设 $f(x), g(x)$ 可导 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

2. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ 的导数.

3. 求 $y=x^x(x>0)$ 的导数

三、由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

若 y 与 x 的函数关系是由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定的. 则称此函数关系所表

达的函数为由参数方程所确定的函数.

如何求由参数方程所

确定的函数的导数?

三、由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

求参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

方法一：消去参数，得到显函数$y=f(x)$后求导

如$\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \end{cases}$消去参数，得到函数$y=x+1$, 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$

方法二：将$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$所确定的函数看做复合函数. 利用复合函数的求导法则求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

三、由参数方程所确定的函数的导数

定理　若（1）$x=\varphi(t)$ 在某区间 I 上单调可导，且 $\boxed{\varphi'(t)\neq 0}$

（2）$y=\psi(t)$ 在区间 I 可导

则由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数

（1）可导

（2）导数 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$

已知 $x=\varphi(t)$ 在某区间 I 上单调可导 $\varphi'(t)\neq 0$

反函数的求导法知

$x=\varphi(t)$ 在区间 I 有可导的反函数 $t=t(x)$

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}$$

参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数可以看做是函数 $y=\psi(t)$ 与 $t=t(x)$ 的复合函数 $y=\psi\left[t(x)\right]$

复合函数的求导法则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'_t\cdot t'_x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

注记 3：由方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 仍以 t 为参数

注记 4：若（1） $x=\varphi(t)$ 在某区间 I 上单调、二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$

（2） $y=\psi(t)$ 在区间 I 上二阶可导

则由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数也二阶可导且

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{x'_t}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\neq\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

例 7：求椭圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$（1）在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应点处的切线方程

分析（1）求切点

（2）求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

（3）求切线的斜率$k = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

（4）写出椭圆在切点处的切线方程

（5）化简

三、由参数方程所确定的函数的导数

例 7：求椭圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$（1）在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应点处的切线方程

解：（1）当$t = \dfrac{\pi}{4}$时$x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a, y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\dfrac{b}{a}\cot t$

（3）$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应点处的切线的斜率$k = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$

（4）椭圆在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应点处的切线方程为$y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$

（5）化简得：$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0$

三、由参数方程所确定的函数的导数

例 7： 设$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ （2）求 y''

解　由（1）知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{b}{a}\cot t$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dfrac{b}{a}\cot t\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dfrac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t} = \frac{b}{a^2}\csc^3 t$$

部分考研原题

（1） （02 年，3 分）已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ __

（2） （05，4 分）设函数 y=y(x) 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 y=y(x)

在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 ____

（3） （01，3 分）曲线 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 在点（0，1）处 的切线方程为 ____

（4） （03，4 分）设函数 y=f(x) 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 y=f(x).

在点(1, 1)处的切线方程是__________ .

部分考研原题

（5）（06，4分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^{y}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{A=0}=$____.

（6）（07，4分）曲线 $\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=1+\sin t \end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为_____

（7）（08，4分）曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_______.

（8）（09，4分）设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy^2}{dx^2}|_{x=0}=$____

思考题

若（1） $y=\psi(t)$ 在某区间 I 上单调可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$

（2） $x=\varphi(t)$ 在区间 I 可导

则由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=?$

小结

隐函数求导法则：直接对方程两边求导

对数求导法：对方程两边取对数, 按隐函数的求导法则求导

参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

§2.7　函数的微分

主要内容

一、微分的概念

二、基本初等函数的微分公式

三、微分的运算法则

四、微分在近似计算中的应用

一、函数微分的概念

1. 背景：正方形金属薄片受热后面积的改变量

设正方形的边长由x_0变到$x_0+\Delta x$

所以

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}$$

（1）是Δx的线性函数，是ΔA的主要部分

（2）是$\Delta x\to 0$时比Δx高阶的无穷小

本质特征：自变量增量为Δx

函数值的增量Δy为

$$\boxed{\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)}$$

其中（1）A 是不依赖于Δx的常数

（2）$o(\Delta x)$是当$\Delta x\to 0$时比Δx高阶的无穷小

一、函数微分的概念

定义： 设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内. 如果函数.

的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\boxed{\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)}$$

其中（1）A 是不依赖于 Δx 的常数

（2）$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小

则称（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的.

（2）$A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$

即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$

一、函数微分的概念

注记 1：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微，则

$$\boxed{\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)} \quad 且\ \mathrm{d}y = A\Delta x$$

注记 2：若 A 是不依赖于 Δx 的常数，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的

充要条件是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}=0$

思考题

函数 $y=f(x)$ 的微分与函数在点 x_0 处的导数有何区别？.

问题

函数$y=f(x)$在点x_0是可微与函数$y=f(x)$在点x_0可导有什么关系?

函数$y=f(x)$在点x_0是可微与函数$y=f(x)$在点x_0连续有什么关系?

若函数$y=f(x)$在点x_0是可微，则$A=?$

一、函数微分的概念

定理 1： 函数$y=f(x)$在x_0可微$\Leftrightarrow$它在x_0可导；

且当函数$y=f(x)$在x_0可微时 $A=f'(x_0)$

即当函数$y=f(x)$在x_0可微时$dy=f'(x_0)\Delta x$

注记 3：（1）函数$y=f(x)$在x_0可微问题总可以化为导数问题

（2）$y=f(x)$在x_0的微分与导数的关系式$dy=f'(x_0)\Delta x$

注记 4：函数$y=f(x)$在x_0可微一定连续，但连续不一定可微

（1）必要性的证明的分析

已知 $f(x)$ 在点 x_0 可微

由定义

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$$

要证明

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A = f'(x_0)$.

（1）必要性的证明

证明：若 $f(x)$在点 x_0可微　由定义可得

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

因此
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

所以
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

（2）充分性证明的分析

已知函数 $f(x)$在点x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

要证明

$f(x)$在点 x_0可微

由定义

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

由无穷小与

极限的关系

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \quad (\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0)$$

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

由注记2

（2）充分性的证明

证：若 $f(x)$ 在 x_0 **可导** 且 $A = f'(x_0)$. 由导数的定义可得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

由无穷小与极限的关系可得 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \quad （\alpha \to 0）$

因此 $$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

又 $\Delta x \to 0$ 时， $\alpha \to 0.$ 因 $\alpha \cdot \Delta x \to 0, \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \alpha \to 0$ 所以

$\alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ 因此 $f(x)$ 在点 x_0 可微

一、函数微分的概念

注记 5：利用微分与导数的关系求函数在某点微分的步骤

第一步：求导函数 $f'(x)$

第二步：求函数在某点的导数 $f'(x_0)$

第三步　代入公式 $dy = f'(x_0)\Delta x$

例 1：填 空

1. 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分___.

2. 函数 $y=x^3$ 当 $x=2, \Delta x=0.02$ 时的微分___.

解. （1）显然 $y'=\left(x^2\right)'=2x$ 因此函数在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=2$

所以函数在 $x=1$ 处的微分 $dy=f'(1)\Delta x=2\Delta x$

（2）显然 $y'=\left(x^3\right)'=3x^2$ 因此函数在 $x=2$ 处的导数 $f'(2)=12$

所以函数在 $x=2, \Delta x=0.02$ 处的微分 $dy=f'(2)\Delta x=12\Delta x=0.24$

一、函数微分的概念

定义：函数 $y=f(x)$ 在任意点的微分称为函数的微分. 记作 dy 或 $df(x)$.

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

通常我们把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分. 记作 dx 即 $dx=\Delta x$ 因此

$$\boxed{dy=f'(x)dx}.$$

从而

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f'(x)}$$

即函数的微分 dy 与自变量 x 的微分之商等于函数的导数. 因此 导数也称为微商

函数微分的几何意义

当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标

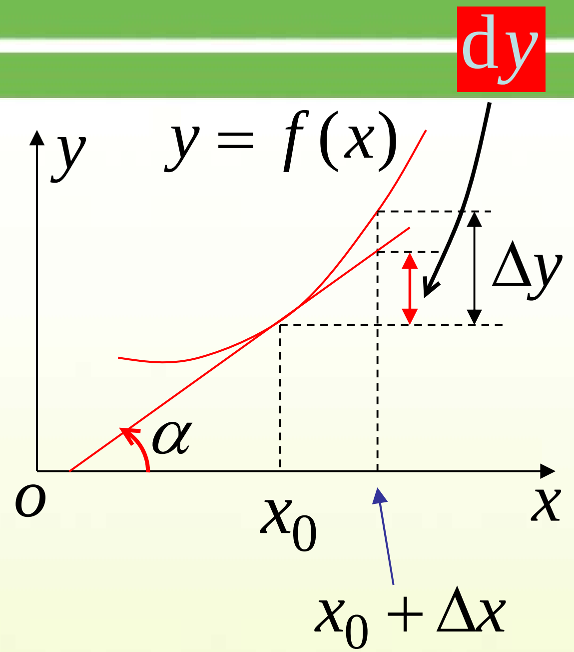
的增量时，dy 就是曲线的切线上点纵坐.

的相应增量.

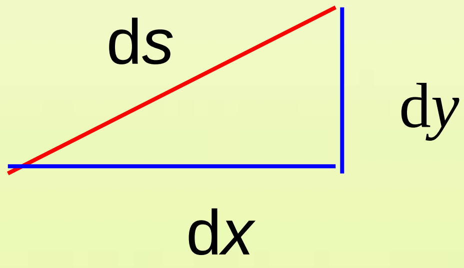
当 Δx 很小时，在点 M 的邻近，我们可以

用切线段来近似代替曲线段.

斜边 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ 称为弧微分



$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$



二、基本初等函数的微分公式

（1）　$d(C)=0$

（2）$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$

（3）　$d(\sin x)=\cos x\,dx$

（4）　$d(\cos x)=-\sin x\,dx$

二、基本初等函数的微分公式

（5） $d(\tan x)=\sec^2 x\,d\,x$

（6） $d\,(\cot x)=-\csc^2 x\,d\,x$

（7） $d\,(\sec x)=\sec x\tan x\,d\,x$

（8） $d\,(\csc x)=-\csc x\cot x\,d\,x$

二、基本初等函数的微分公式

（9） $d(a^x)=a^x \ln a \, dx \,(a>0, a\neq 1)$

（10） $d(e^x)=e^x \, dx$

（11） $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx \,(x>0)$

(12) $d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \,(a>0, a\neq 1, x>0)$

二、基本初等函数的微分公式

（13） $$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

（14） $$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

(15) $$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$$

(16) $$d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

三、函数微分的运算法则

定理 1：　设函数 $u=u(x), v=v(x)$ 在 x 处可微，则

（1）$\mathrm{d}(u \pm v)=\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$ ⟵ $[u \pm v]' = u' \pm v'$

（2）$\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u$ （C 为常数） ⟵ $[Cu]' = Cu'$

（3）$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$ ⟵ $[uv]' = u'v + uv'$

（4）$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v \neq 0)$ ⟵ $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\quad (v \neq 0)$

三、函数微分的运算法则

定理 2　设 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 分别可微,则复合函数

$y=f(\varphi(x))$ 的微分为

$$\mathrm{d}\,y = y'_x\,\mathrm{d}\,x = f'(u)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

三、函数微分的运算法则

设 $y=f(x)$ 有导数 $f'(x)$

当 x 是自变量时

当 x 是中间变量时即 $x=\varphi(t)$

$$dy=f'(x)dx$$

$$dx=\varphi'(t)dt$$

$y=f(x(t))$ 的微分

$$dy=y'_t dt=f'(x)\varphi'(t)dt$$

三、函数微分的运算法则

设 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$

不论 x 是中间变量还是自变量函数 $y = f(x)$ 的微分形式

总是

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

一阶微分

形式不变形

三、函数微分的运算法则

如：导数 $(\sin x)' = \cos x$

$$(\sin x(t))' = \left(\cos x(t)\right) \cdot x'(t)$$ 形式变了

微分 $d \sin x = \cos x dx$

$$d \sin x(t) = \left(\cos x(t)\right) dx(t)$$ 形式没有变化

四、函数微分的求法

方法一：求导法：即利用微分与导数的关系求函数 $y = f(x)$ 微分

即 $$\mathrm{d}y = f'(x)dx$$

方法二：微分法 ：利用一阶微分的形式不变性、基本初等函数的微

分公式及微分法则求函数 $y = f(x)$ 微分

四、函数微分的求法

例 1： $y=\sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$

分析： 利用求导法

（1）利用复合函数的求导法则求出 y'

（2）利用 $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ 求出 $\mathrm{d}y$

解：由复合函数的求导法则可得 $y' = 2\cos(2x+1)$

因此 $$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = 2\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x$$

四、函数微分的求法

例 2 $y=e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$

分析：应用微分法求 $\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}y=d\left(e^{1-3x}\cos x\right)$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$

一阶微分的形式不变性

$$\mathrm{d}y=\cos x\,de^{1-3x}+e^{1-3x}d\cos x$$

$$\mathrm{d}(e^{1-3x})=e^{1-3x}\mathrm{d}(1-3x)=-3e^{1-3x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y=-3(\cos x)e^{1-3x}\mathrm{d}x-(\sin x)e^{1-3x}\mathrm{d}x$$

$$=-(3\cos x+\sin x)e^{1-3x}\,\mathrm{d}x$$

四、函数微分的求法

例 2 $y=e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$

解:由积的微分法则及微分公式可得

$$\mathrm{d}y=d\left(e^{1-3x}\cos x\right)=\cos x de^{1-3x}+e^{1-3x}d\cos x$$

$$=\left(\cos x\right)e^{1-3x}d(1-3x)+e^{1-3x}(-\sin x)dx$$

$$=-3\left(\cos x\right)e^{1-3x}\mathrm{d}x-\left(\sin x\right)e^{1-3x}\mathrm{d}x$$

$$=-\left(3\cos x+\sin x\right)e^{1-3x}\ \mathrm{d}x$$

四、函数微分的求法

例 3：设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，利用一阶微分形式的不变性求 y'

解：由一阶微分形式的不变性可得

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}\left(\sin x\right)+\sin(x-y)\,\mathrm{d}(x-y)=0$$

从而

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

故

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\mathrm{d}x$$

因此

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

四、函数微分的求法

例 4. 在括号中填入适当的函数，使等式成立.

（1） $d(\quad)=xdx$ （2） $d(\quad)=\cos wtdt$

解：（1）因为 $d(x^2)=2xdx$ 所以 $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d(\frac{x^2}{2})$

即 $$d(\frac{x^2}{2})=xdx$$

一般地，有 $d(\frac{x^2}{2}+C)=xdx$ （C 为任意常数）.

（2）同理 $d(\frac{\sin wt}{w}+C)=\cos wtdx$ （C 为任意常数）.

四、函数微分的求法

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，由于 $dy=f'(x_0)\Delta x$，所以

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0,\quad dy\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

因此当 $\Delta x\to 0$，Δy 与 dy 是等价无穷小.

注记 6：设 $f'(x_0)\neq 0$，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，我们称 dy 是 Δy 的线性主部.

五、微分在近似计算中的应用

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$ 则当 $|\Delta x|$ 很小时，我们有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$$

即 $$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

所以 $$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

若令 $x=x_0+\Delta x$, 即 $\Delta x=x-x_0$, 那么又有 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$

特别当 $x_0=0$ 时, 有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x.$

五、微分在近似计算中的应用

注记 7： $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 使用原则

（1） $f(x_0), f'(x_0)$ 容易计算

（2） $\Delta x = x - x_0$ 较小

注记 8：求函数近似值的步骤

第一步：确定 $x_0, \Delta x$

第二步：计算 $f(x_0)$

第三步：求 $f'(x_0)$

第四步： 利用 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ 求出近似值

五、微分在近似计算中的应用

例 8．利用微分计算 $\sin 30^0 30'$ 的近似值.

解　已知 $30^0 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}$　因此设

$$f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6},\quad \Delta x = \frac{\pi}{360}$$

显然（1）容易算出，$f(x_0) = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\Delta x = \frac{\pi}{360}$ 较小

因此　$\sin 30^0 30' = f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6})\Delta x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.5076$

五、微分在近似计算中的应用

常用的近似公式（假定$|x|$是较小的数值）

由 $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

可以得到

（1） $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$

（2） $\sin x \approx x$ (x 用弧度作单位来表达)

（3） $\tan x \approx x$ （ x 用弧度作单位来表达）

（4） $e^{x} \approx 1+x$

（5） $\ln(1+x) \approx x$

部分考研原题

1. （05，4分）设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$______.

2. （02, 3 分）. 函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1)=$____.