高等数学(上册)

同济六版

作者 杨永举

南阳师范学院数学与统计学院高等数学教研室

第一章 函数与极限

作者 杨永举
南阳师范学院数学与统计学院高等数学教研室高等数学课件

第一节　　映射与函数

一、集合

二、映射

三、函数

一、集合

集合的表示法:

列举法: 将集合中的全体元素一一列举出来 .

例: 有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

描述法: $M=\{x \mid x\text{具有性质P}\}$

例: 整数集合 $\mathrm{Z}=\{x \mid x\in \mathrm{N}\text{或}-x\in \mathrm{N}^+\}$

有理数集 $\mathrm{Q}=\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p\in \mathrm{Z}, q\in \mathrm{N}^+, p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$

评注: 无限集合常用描述法表示

（二）集合的运算

1、基本运算:

- 并集：$A \cup B$。
- 交集：$A \cap B$。
- 差集：$A \setminus B$,
- 补集：A^C
- 直积 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

特例: $\mathrm{R} \times \mathrm{R} \overset{记}{=\!=} \mathrm{R}^2$ 为平面上的全体点集

注意：对 R^2 从符号，集合，几何三个角度方面理解

3. 区间与 邻域

区间的概念:

(1) 开区间: 设a和b都是实数, 且$a<b$, 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间, 记作$(a\ ,b)$

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

(2) 闭区间: 设a和b都是实数, 且$a<b$, 数集

$$\{x \mid a \le x \le b\}$$

称为闭区间, 记作$[a\ ,b]$

$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

(3) 半开区间:

$$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$$

有限区间

(4) 无限区间:

$$(-\infty,\infty)=\{x \mid x\in R\}$$

$$[a,\infty)=\{x \mid a\le x\}$$

$$(a,\infty)=\{x \mid a< x\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x< b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\}$$

注意 1：全体实数的集合 $R=(-\infty,+\infty)$，其中 $-\infty,+\infty$ 只是表示无限性的一种记号，它们不是某个确定的数，不能像数一样进行运算

注意 2：实数区间仅有上述 9 种类型

邻域的概念

设δ是任一正数，则开区间（$a-\delta$，$a+\delta$）称为点a的邻域。

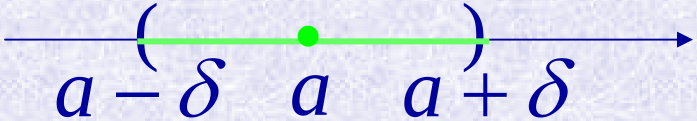
$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$
$$=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

去心 δ邻域

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

其中，a 称为邻域中心，δ称为邻域半径．

左 δ邻域：$(a-\delta,a)$，



右 δ邻域：$(a,a+\delta)$.

注意：$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

二、映射

（一）映射的概念

定义:

设X,Y是两个非空集合，如果存在一个法则 f,使得对X中的每个元素x，按法则 f,在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称 f 为从X到Y的映射。

记作

$$f : X \to Y .$$

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的 **像**，记作 $y = f(x)$.

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的 **原像**.

集合 X 称为映射 f 的**定义域**;

Y 的子集 $f(X) = \{ f(x) | x \in X \}$ 称为 f 的 **值域**.

注意:

1、构成映射必备的三要素:

① 定义域

② 值域（值域由定义域和对应法则确定）

③ 对应法则f是对每个$x\in X$，有唯一确定的$y=f(x)$与之对应。

2、元素 x 的像 y 是唯一的, 但 y 的原像不一定唯一 .

满射: 对映射 $f: X \to Y$ 若 $f(X)=Y$, 则称 f 为**满射**;

单射: 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$

则称 f 为**单射**;

双射: 若 f 既是满射又是单射,

则称 f 为**双射** 或**一一映射**.

（二）逆映射与复合映射

1、逆映射的定义

定义: 若映射 $f: D \to f(D)$ 为单射，则存在一新映射

$f^{-1}: f(D) \to D$，使 $\forall y \in f(D)$，$f^{-1}(y) = x$，其中 $f(x) = y$，

称此映射 f^{-1} 为 f 的逆映射．

习惯上，$y = f(x), x \in D$

的逆映射记成

$$y = f^{-1}(x)\ ,\ x \in f(D)$$

例如，映射 $f(x) = \tan x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 其逆映射为

$$y = f^{-1}(x) = \arctan x$$

2、复合映射

定义:

设有两个映射 $g: X \to Y_1$，$f: Y_2 \to Z$

其中 $Y_1 \subset Y_2$

则由映射g和f可以定出一个从X到Z的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$

显然，这个对应法则确定了一个从X到Z的映射，这个映射称为映射g和 f构成的复合映射，记作 $f \circ g$ 即

$$f \circ g : X \to Z\,, \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X$$

三、函数

（一）函数的概念

定义4. 设数集 $D \subset R$, 则称映射 $f : D \to \mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数, 记为

定义域D_f

$$y = f(x),\ x \in D$$

因变量

自变量

$f(D)$ 称为值域R_f

$$\forall\, x \in D \xrightarrow{\ f\ } y \in f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

(定义域) (对应规则) (值域)

函数构成两个要素

定义域,对应法则

注意：若两函数的定义域相同，对应法则也相同，

那么这两个函数就是相同的，否则就是不同。

注意：函数自变量和因变量与变量字母的选择无关。

注意：若没有标明函数定义域，则通常指的是使该表达式有意义的自变量取值范围。

（二） 函数的几种特性

设函数 $y = f(x), x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

1、有界性(两种等价方法）

定义1: $\forall x \in I, \exists M > 0$,使 $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在 I 上有界.

定义2:具有上，下界的函数是有界函数。

$\forall x \in I, \exists M$, 使 $f(x) \le M$，称 $f(x)$ 在 I 上有上界

$\forall x \in I, \exists m$, 使 $f(x) \ge m$ 称 $f(x)$ 在 I 上有下界

定义3: 若对任意正数 M， $x \in D$, 使 $|f(x)| > M$, 均存在 则称 $f(x)$ 无界.

2、 单调性

$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的单调增函数;

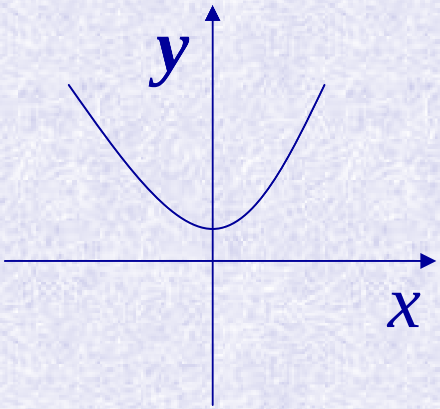
若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的单调减函数.

3、 奇偶性

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

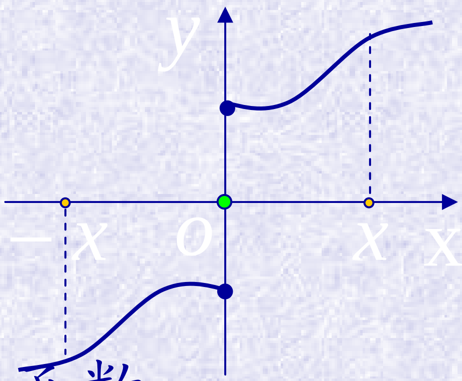
由定义知偶函数关于y轴对称



$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

由定义知奇函数关于原点对称



注：两个奇函数的和，差，复合是奇函数;两个奇函数的积，商是偶函数；一奇一偶非函数的和，差非奇非偶，积商为奇函数，复合为偶函数；两个偶函数的和，差，积，商仍为偶函数。

4、 周期性

设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个正数l，使得对于任一 $x \in D$,有 $x \pm l \in D$，且

$f(x \pm l) = f(x)$ 则称 $f(x)$为周期函数，称 l 为周期

(一般指最小正周期).

注意: 周期函数不一定存在最小正周期.

例如：常数函数 $f(x) = C$

或　狄里克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数} \\ 0, & x\text{ 为无理数} \end{cases}$

注意: 最小正周期是函数图象出现重复的最小距离.

（三）反函数与复合函数

1、反函数的概念及性质

若函数 $f: D \to f(D)$ 为单射，则存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数.

习惯上，$y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

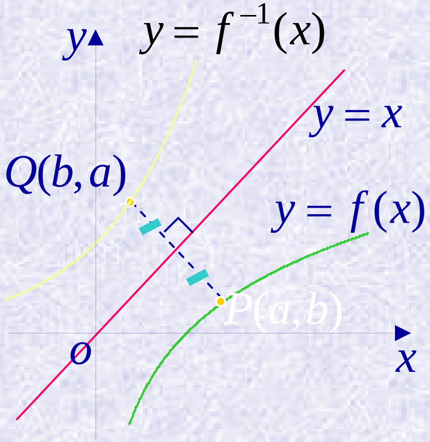
$$y = f^{-1}(x)\ , x \in f(D)$$

性质:

1) $y=f(x)$ 单调递增 (减) 其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在,

且也单调递增 (减) .

2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



如图:

指数函数 $y=e^x, x\in(-\infty,+\infty)$

对数函数 $y=\ln x \ , x\in(0,+\infty)$

互为反函数 ,

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

2、 复合函数

设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_1 \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D, \quad 且\ g(D) \subset D_1 \qquad ②$$

$$y = f[g(x)],\ x \in D$$

称为由①, ②确定的复合函数，u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

例如, 函数链 $y = \arcsin u$, $u = 2\sqrt{1-x^2}$,可定义复合函数

$$y = \arcsin 2\sqrt{1-x^2}, \quad x \in D = [-1, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

但函数链 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数.

为什么?

两个以上函数也可构成复合函数.

例如,

$$y=\sqrt{u}\,,\ u>0$$

$$u=\cot v\,,\ v\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$v=\frac{x}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

可定义复合函数:

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad x\in(2k\pi\,,(2k+1)\pi\,],\quad n\in Z$$

其中u、v都是中间变量

$$k\pi<\frac{x}{2}\leq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{时},\ \cot\frac{x}{2}\geq 0$$

3、函数的运算

$f(x), g(x)$的定义域依次为$D_1, D_2, D = D_1 \bigcap D_2 \neq \phi$

则可以定义两个函数的下列运算

和（差）$f \pm g$ $\quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$

积

商 $\frac{f}{g}$ $\quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

（四） 初等函数

1、 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

2、 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．否则称为非初等函数．

注1: 绝对值函数为初等函数;

注2: 分段函数及无限形式的式子等一般不是初等函数.

内容小结

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases}\text{定义域}\\ \text{对应规律}\end{cases}$

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性

4. 初等函数的结构

思考与练习

1: 分解复合函数 $y = \mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+x}}$.

解: $y = \mathrm{e}^u,\ u = \sin v,\ v = \sqrt{t},\ t = x^2 + x,$ $\cancel{t = w + s,\ w = x^2, s = x.}$

复合函数分解的原则为分解后的函数是五类基本初等函数形式或四则运算式子.

2: 判断下列函数是否是复合函数，若是，试分解

(1) $y = \sin x + e^x$

(2) $y = \ln\sin(3x^3 + 4)$ $y = \ln u, u = \sin v, v = 3t + 4, t = x^3.$

(3) $y = 2^{\frac{\sin x}{\ln x}}$ $y = 2^u, u = \dfrac{\sin x}{\ln x}.$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x<1 \\ \sin x, & x\ge 1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ 1-x^2, & x\ge 0 \end{cases}$,

求 $f[\varphi(x)]$.

作业：P21 4:（5, 7, 8, 10）; 6; 8.
P22 10:（1, 3, 6）; 12:（2, 3, 6）; 15

第二节 数列的极限

一、概念的引入

二、数列的定义

三、数列的极限

四、数列极限的性质

五、小结

一、数列极限的定义的引入

引例. 设有半径为 r 的圆，用其内接正 n 边形的面积逼近圆面积 S.

$$A_n = n r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

当 n 无限增大时, A_n 无限逼近 S

用圆内接正多边形的面积近似圆的面积S.

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣" (刘徽割圆术)

评注：圆的外切正n变形的面积逼近圆面积是什么式子？

二、数列的定义

定义:按照某一法则，对自然数1,2,3,$\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为数列.其中的每个数称为数列的项,x_n称为通项(一般项).数列(1)记为$\{x_n\}$.

评注：本教材所谈的数列都是无穷数列,数列具有无限性，确定性和有序性，每一项都是常数的数列称为常值数列，常值数列是最简单的数列.

数列例子 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

$$x_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

$$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

收敛

$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

$$x_n = 2^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad \text{趋势不定}$$

发散

中心问题: $n \to \infty$时，x_n是否能接近于某个确定 的数值？

在研究数列时,常常以下面两种观点之一看待数列.

几何观点: 1.数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

函数观点: 2. 数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为 n 的函数： $x_n = f(n) \quad n \in \mathbf{N}_+$.

数列极限的通俗定义

当n无限增大时，如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限接近于常数a, 则常数a称为数列$\{x_n\}$的极限, 或称数列$\{x_n\}$收敛a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

思考题：极限的只管定义虽然直观易懂，但是不严谨，那些地方不严谨，需要向那 地方改进？

数列的极限

考察数列: $\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ $\quad |x_n-1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

给定 $\varepsilon = \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$,

给定 $\varepsilon = \frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon > 0$, 只要 $n > N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$ 时, 有 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立.

因此，如果n增大到一定程度以后，$|x_n-1|$能小于事先给定的任意小的正数，则当n无限增大时，x_n无限接近于常数1.

当n无限增大时，x_n无限接近于a .$\Leftrightarrow$当n增大到一定程度以后，$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数 ε.

定义：设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a \ (n\to\infty)$

如果不存在这样的常数a，就说数列$\{x_n\}$没有极限，即数列是发散的。

注意：

1.不等式$|x_n - a| < \varepsilon$刻划了 x_n与a的无限接近；

2.N与任意给定的正数 ε有关.

定义：设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a \ (n\to\infty)$

数列极限的精简版本定义(数学符号定义):

$\varepsilon - N$定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0, \exists N>0$，使$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

$\varepsilon - N$定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

其中 $\forall$: 每一个或任给的；$\exists$: 至少有一个或存在 .

几何解释:

当$n > N$时, 所有的点 x_n都落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,
只有有限个 (至多只有 N个) 落在其外 .

评注: 数列极限的定义精确,但是以付出抽象为代价.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使} n > N \text{时}, \text{恒有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

证 $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$,

所以, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \text{使} n>\max(N,N_0) \text{时,恒有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

例2 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$

证 $|x_n - 0| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

对 $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

所以, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| < \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$

小结：证明的关键是根据所给的 ε, 能否证明定义中的 正整数 N 确实存在，或者说能否确实寻找到定义中规定的 N， 至于所取的 N 为多大，是否是最小的，则无关紧要。

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall 1 > \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使} n > N \text{时}, \text{恒有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证 $q = 0$时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

$q \neq 0$时, 任给 $\varepsilon > 0$, $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, $n \ln|q| < \ln \varepsilon$,

$\therefore n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ 取 $N = [\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}]$, 则当 $n > N$时,

就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

四、数列极限的性质

1.唯一性

定理1 每个收敛的数列只有一个极限.

分析 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $|a-b| = ?$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 由定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$, 使得 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$; 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

则当 $n > N$ 时有 $|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$

$$\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故收敛数列极限唯一.

四、数列极限的性质

2.收敛数列的有界性

定义：若存在正数 M，对 $\forall n$，恒有 $|x_n| \le M$，则称数列 x_n 有界；否则，称为无界.

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

例如, 数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$；有界　数列 $x_n = 2^n$.无界

例 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的.

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{3}$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{1}{3}$ 成立,

即当 $n > N$ 时, $x_n \in (a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$, 这是不可能的.

因为 x_n 无休止地反复取 1, – 1两个数,

不可能同时位于长度为1的区间内.

事实上, $\{x_n\}$ 是有界的, 但却发散.

五.小结

数列: 研究通项的表示.

数列极限: 精确定义；几何意义.

收敛数列的性质: 有界性；唯一性.

判断数列的敛散性:　无界一定发散

几类特殊的数列:　摆动数列；常值数列

练 习 题

一、 利用数列极限的定义证明:

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{4n+1}=\dfrac{5}{4}$;

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+10}}{n}=1$

二、 数列 x_n 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A\left(A\neq 0\right)$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n z_n=0$.

作业：P31 1: (3, 7, 6, 8); 4; 6.

第三节　函数的极限

一、自变量趋于有限值时函数的极限

二、自变量趋于有无穷大时函数的极限

三、函数极限的性质

四、小结

一、自变量趋向有限值时函数的极限

函数极限的的通俗定义

如果当x无限地接近于x_0时, 函数$f(x)$的值无限地接近于常数A, 则常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to x_0$).

注意: x无限地接近于x_0是指：在一定程度之后，x是和的距离越来越小；要怎么小就怎么小；而且不能为零

1. 精确定义： 对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当x\to x_0)$$

"ε−δ"定义 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, 当0<|x-x_0|<\delta, 有|f(x)-A|<\varepsilon$

注意：

1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.(ε,δ)是极限的数学符号语言

"ε − δ"定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

注意: 1. $|f(x) - A| < \varepsilon$ 中的 ε 刻划了 $f(x)$ 与 A 的接近程度;

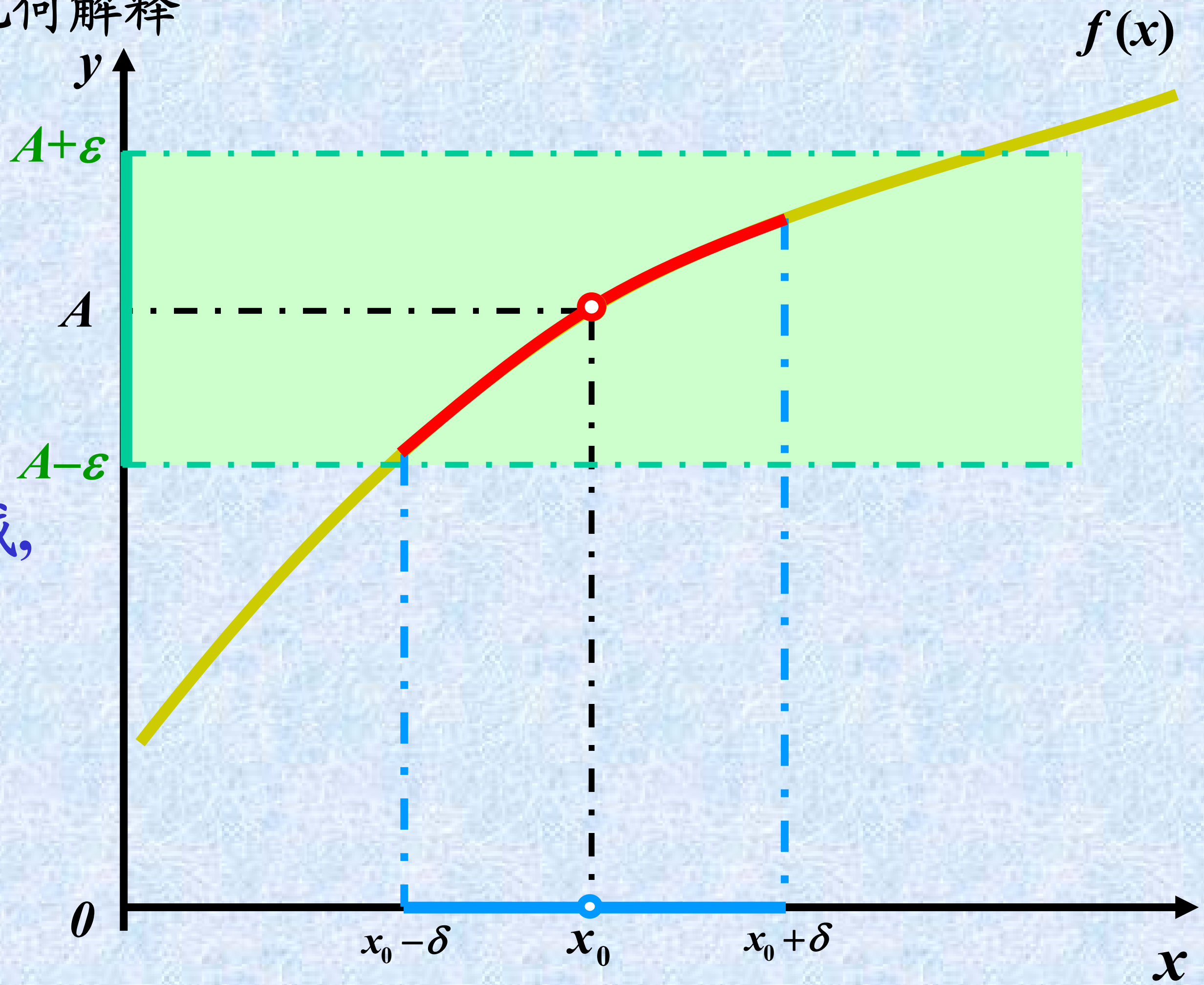
δ 刻划了 x 与 x_0 的接近程度 ;

2. ε 是任意给定正数, δ 是随 ε 而确定的.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall 1 > \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta, \text{有} |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何解释



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\forall A$的ε邻域,

$\exists\, x_0$的空心δ邻域,

该邻域内所有点 x 的纵坐标$f(x)$落在 A的 ε 邻域 内,即相应的点$(x, f(x))$落在绿色区域内.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta,$有$|f(x)-A|<\varepsilon$

例1　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C,$ (C为常数).

证　任给$\varepsilon>0$,　任取$\delta>0$,　当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$|f(x)-A| = |C-C| = 0 < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C.$

例2　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

证　$\because |f(x)-A| = |x-x_0|,$ 任给$\varepsilon>0$,　取$\delta=\varepsilon$,

当$0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon$时,

$|f(x)-A| = |x-x_0| < \varepsilon$成立,　$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0.$

例3. **证明** $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

证: $\boxed{|f(x)-A|}=|(2x-1)-1|=2|x-1|$

$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon,}$ 只要 $|x-1|<\varepsilon/2$,

取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 必有

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta,$ 有$|f(x)-A|<\varepsilon$

例4　证明 $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2.$

证　函数在点$x=-1$处没有定义.

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-1}{x+1}-(-2)\right|=|x+1|$$

任给$\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要取$\delta=\varepsilon$,

则当$0<|x+1|<\delta$时, 就有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-(-2)\right|<\varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

注意：该函数在 $x=-1$ 处没有定义，但 $\lim_{x\to -1} f(x)$ 存在.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta, \text{有} |f(x) - A| < \varepsilon$$

例5 证明：当$x_0 > 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 函数$\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$，因此我们考察的 x_0的邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$必须落在$[0,+\infty)$内，即$\delta \le x_0$.

$$\because |f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \le \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

任给$\varepsilon > 0$，要使$|f(x) - A| < \varepsilon$，只要$|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$.

因此，$\forall\varepsilon > 0$，取$\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$，

则当$0 < |x - x_0| < \delta$时，总有$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$，

$$\therefore \lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

单侧极限

若当$x\to x_0-$时，$f(x)$无限接近于某常数A, 则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-)=A .$$

左极限 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当$x_0-\delta<x<x_0$时,

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ 或 $f(x_0-) = A$.

右极限 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当$x_0<x<x_0+\delta$时,

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$ 或 $f(x_0+) = A$.

❖单侧极限

x从左侧无限趋近 x_0，记作$x \to x_0^-$

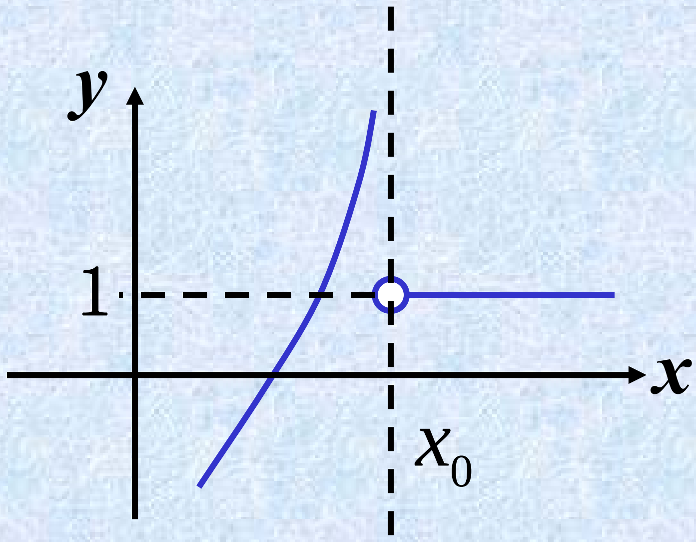
x从右侧无限趋近 x_0，记作$x \to x_0^+$

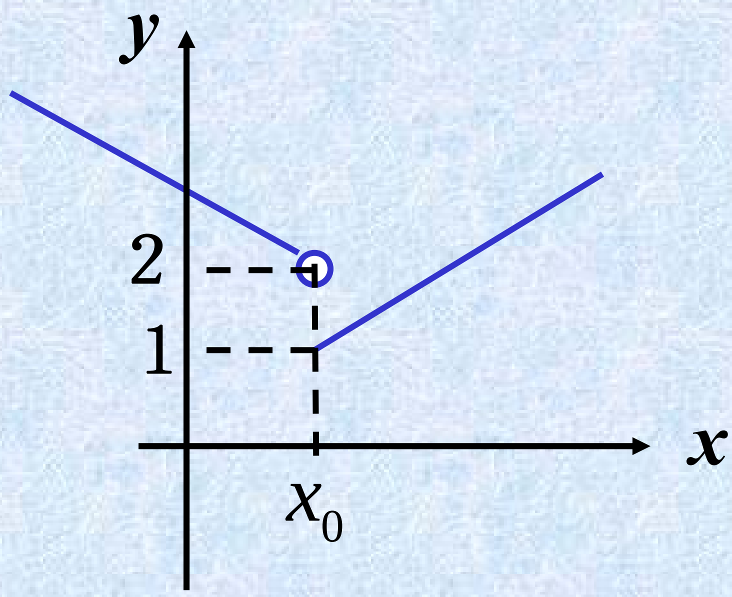
左极限=A　记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$

右极限=A　记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$

注1：左极限与右极限都称之为单侧极限

注2：单侧极限与双侧极限的关系





两个函数当$x \to x_0$时的极限都不存在！

注2：单侧极限与双侧极限的关系

定理：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A.$

定理3: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-)=f(x_0+)=A.$

推论：若函数$f(x)$在点x_0的左、右极限有一个不存在，或都存在但不相等，则极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

例6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x+0}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1$

左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases}5+\sin x, & x>0\\ 1, & x=0\\ 5+x^2, & x<0\end{cases}$

在 $\boldsymbol{x=0}$ 处的左、右极限是否存在？当 $\boldsymbol{x\to 0}$ 时，$\boldsymbol{f(x)}$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(5+x^2)=5,\quad \text{左极限存在,}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(5+\sin x)=5,\quad \text{右极限存在,}$$

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)=5$$

二、自变量趋向无穷大时函数的极限

定义 1： 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数X，使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当 x\to\infty)$$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - X\text{"定义}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,使当|x|>X时,恒有|f(x)-A|<\varepsilon.$$

"ε − X"定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

注意: 1. $|f(x) - A| < \varepsilon$ 中的 ε 刻划了 $f(x)$ 与 A 的接近程度;

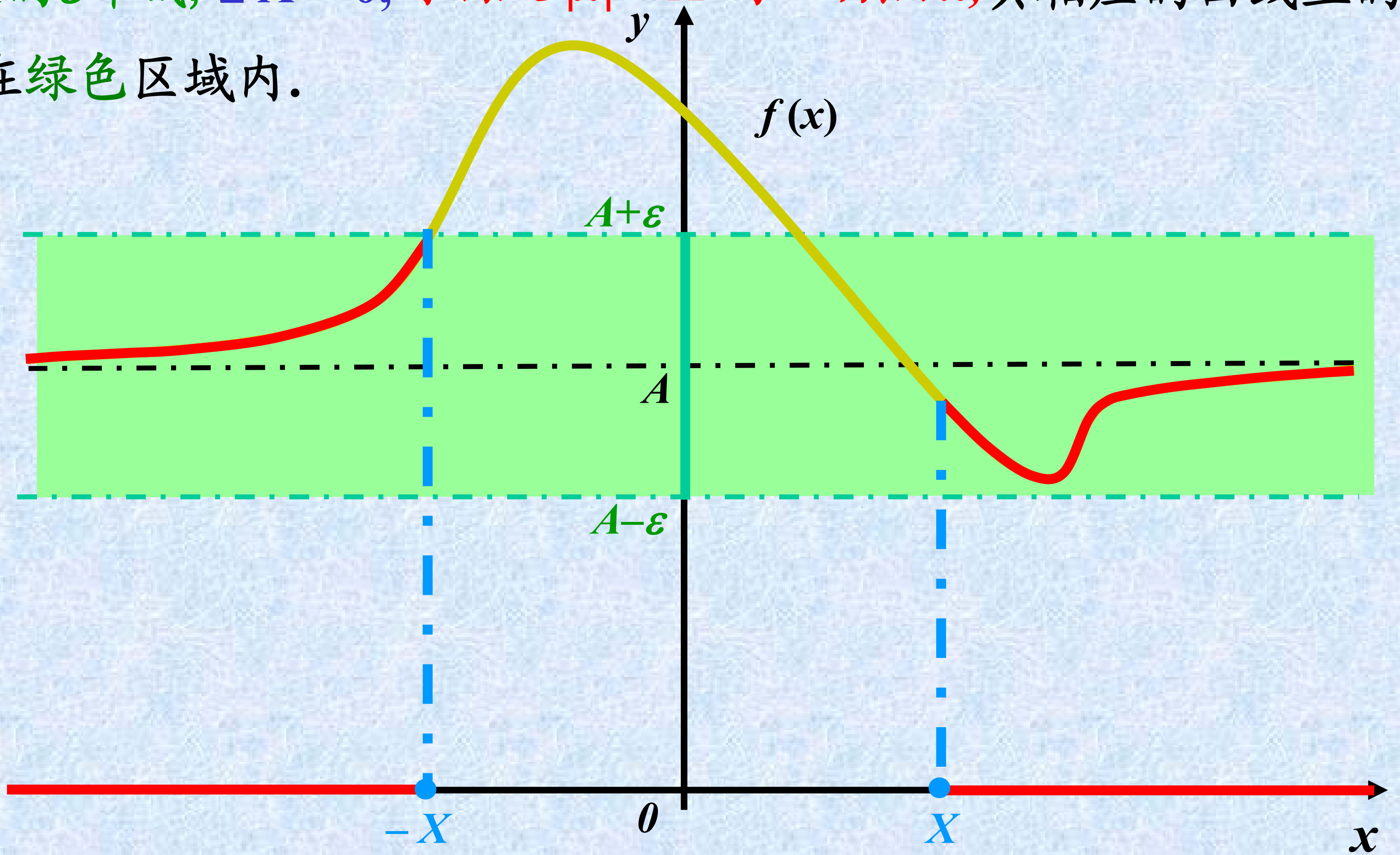
$|x| > X$ 中的 X 刻划了 $|x|$ 充分大的程度;

2. ε 是任意给定正数, X 是随 ε 而确定的.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{使当 } |x| > X \text{时，恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何解释

$\forall A$的ε邻域, $\exists X > 0$,对满足 $|x| > X$ 的一切点 x,其相应的曲线上的点落在绿色区域内.



2.另两种情形:

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

$2^0.\ x \to -\infty$ 情形: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

定理: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

证 $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$ 即 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

$\forall\varepsilon > 0$, 取 $X = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

定义: 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

三、函数极限的性质

1.唯一性

定理 1　若$\lim f(x)$存在,则极限唯一.

2.函数极限的局部有界性

定理 2　若在某个过程下, $f(x)$有极限, 则存在过程的一个时刻, 在此时刻以后$f(x)$有界.

极限的局部有界性 若函数$f(x)$在自变量x某变化趋势之下有极限，则$f(x)$对应变化区间上是有界的。

定理3（极限的局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且$A>0$ (或$A<0$), 则$\exists\delta>0$, 当$x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)>0$(或$f(x)<0$).

证明 就$A>0$的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}\ (\text{取}\varepsilon=\frac{A}{2})\ \Rightarrow A-\frac{A}{2}<f(x)\ \Rightarrow f(x)>\frac{A}{2}>0.$$

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且$\exists\delta>0$, 当$x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$), 则$A\geq 0$(或$A\leq 0$). **反证法**

定理3’:若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$，则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，使当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

分析: $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

若取 $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$，则在对应的邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 上

$$A>0:\quad \frac{A}{2}<f(x)<\frac{3A}{2}$$

$$A<0:\ -\frac{3|A|}{2}<f(x)<-\frac{|A|}{2}$$

四、小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A;\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=A;\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A;\qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A;\qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta,\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon$$

(见下表)

内容小结

1. 函数极限的"$\varepsilon-\delta$" 或"$\varepsilon-X$" 定义及应用

2. 函数极限的性质:保号性定理 Th1 Th2

与左右极限等价定理 Th3

思考题

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$?

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, & x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, 则

$a=$ ______ .

练 习 题

一、填空题:

1、当 $x \to 2$ 时，$y = x^2 \to 4$，问当 δ 取 ___ 时，

只要 $0 < |x - 2| < \delta$，必有 $|y - 4| < 0.001$.

2、当 $x \to \infty$ 时，$y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \to 1$，问当 z 取 ______

时，只要 $|x| > z$，必有 $|y - 1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义 证明:

1、$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2$

2、$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

三、试证：函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

四、讨论：函数 $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x \to 0$ 时的极限是否存在？

作业：P38 5:(1, 3, 4); 7; 8; 9.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系

四、小结

一 无穷小

❖无穷小的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\lim_{x \to \infty} f(x) = 0).$$

例如: 因 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$, 所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 为当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

注意: 1.无穷小是极限为零的函数, 而不是 很小很小的数.

2.无穷小这个概念和极限过程有关.

再例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0,\quad \therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\quad \therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0,\quad \therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

特别注意 1.数列也可以定义无穷小.

2.零是可以作为无穷小的唯一的数.

2、无穷小与函数极限的关系：

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta,$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$ $\Longleftrightarrow$ $|\underline{f(x)-A}|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $\alpha(x)$ $|\alpha(x)|<\varepsilon$

意义

1)该定理的主要作用是用普通的函数式

$f(x)=A+\alpha(x)$替代极限式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

2)给出了函数 $f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x)\approx A$,误差为 $\alpha(x)$.

二　无穷大

❖无穷大的定义

如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

注：无穷大属于极限不存在的情形.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称直线 $x = x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例如，直线 $x=1$ 是函数 $y = \dfrac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Longleftrightarrow$$

$$\forall M>0, \exists \delta>0, \text{当} 0<|x-x_0|<\delta, |f(x)|>M$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow$$

$$\forall M>0, \exists \delta>0, \text{当} 0<|x-x_0|<\delta, f(x)<-M$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow$$

$$\forall M>0, \exists X>0, \text{当} x<-X, f(x)>M$$

例2 证明$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证 $\forall M>0.$ 取 $\delta=\dfrac{1}{M}$

当$0<|x-1|<\delta,$

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>\frac{1}{\delta}=M$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则直线$x=x_0$是函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

注意 1.无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

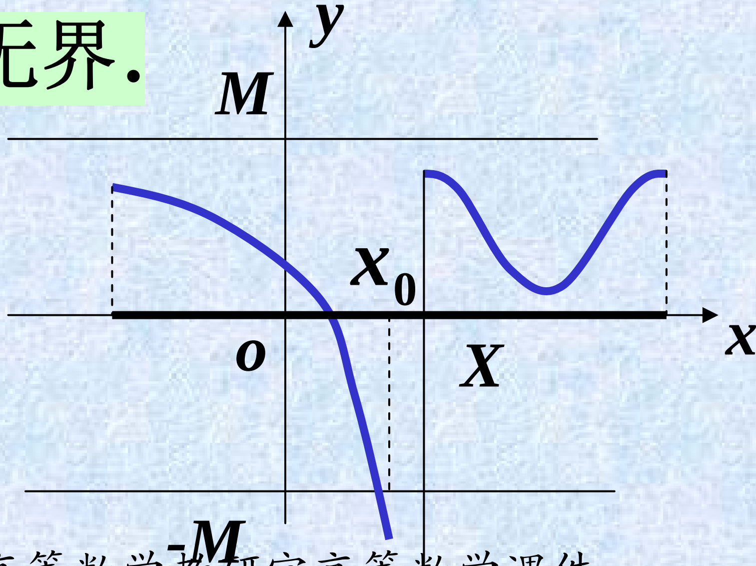
2.切勿将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

无穷大是其绝对值不断增大的变量。

若 $X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \le M$ 成立,

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.否则称无界.



三、无穷小与无穷大的关系

定理2 在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

分析 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

$\therefore \forall M>0, \exists \delta>0,$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\dfrac{1}{M}=\varepsilon$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

三、无穷小与无穷大的关系

定理2 在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\left| \dfrac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$.

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$.

$\therefore \forall M>0, \exists \delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时

恒有$|f(x)|<\dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x)\neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$.

$\therefore$ 当$x\to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

例2 $\because \quad \lim_{x\to 1}(x-1)=0.$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

四、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;两个定理.

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;

（2） 无界变量未必是无穷大.

内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义 Th1

2. 无穷小与函数极限的关系 Th2

3. 无穷小与无穷大的关系

思考题

若 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

问：能否保证有 $A>0$ 的结论？试举例说明.

思考题解答

不能保证.

例 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad \forall x>0,\quad$ 有 $f(x)=\dfrac{1}{x}>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=A=0.$$

练 习 题

一、填空题:

1、凡无穷小量皆以__________为极限.

2、在____________条件下,直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线 .

3、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ________ $f(x)=A+\alpha$,(其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$) .

4、在同一过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,则_______是无穷小 .

二、根据定义证明:当 $x\to 0$ 时,函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 是无穷大,问 x 应满足什么条件,能使 $|y|>10^4$.

三、证明函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但当 $x\to+0$ 时，这个函数不是无穷大.

作业：P42 2:(1,2);4;6.

第五节　极限运算法则

一、无穷小的运算性质

二、极限运算法则

三、求极限方法举例

四、小结

重点：扎实、熟练掌握极限运算法则

一、无穷小的运算性质

定理1 有限个无穷小的和仍是无穷小.

考虑两个无穷小的和

设α及β是当$x \to x_0$时的两个无穷小,

则$\gamma = \alpha + \beta$也是当$x \to x_0$时的无穷小。

证明略

注意: 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例　　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

解1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0$$

$$=0$$

解2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

思考:对比解1、解2, 判断哪种解法正确,并分析原因

注意:　极限的运算法则只能推广到有限多项，当项数无限时，要先求和（或积）再求极限

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界,

则 $\exists M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 恒有 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 恒有 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

例如，当$x \to 0$时，$x\sin\frac{1}{x^2}$，$x^2\arctan\frac{1}{x^2}$都是无穷小

解1：$\because \lim\limits_{x\to 0} x = 0$，而$|\sin\frac{1}{x^2}| \le 1$，

即当$x \to 0$时，x是无穷小量，$\sin\frac{1}{x^2}$是有界量.

$$\therefore \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$$

解2：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2} = 0\,(\times)$

思考:对比解1、解2，判断哪种解法正确,并分析原因。

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

二、极限运算法则

定理3: 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B,$ 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},$ 其中 $B\neq 0.$

注意: 只有在两极限存在的前提下，才有：
和的极限等与极限的和.

差、积、商

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

（2） $\lim[f(x)\cdot g(x)]=(A\cdot B)$

证 （2） $\because \lim f(x)=A, \quad \lim g(x)=B.$

$\therefore\ f(x)=A+\alpha, \quad g(x)=B+\beta.$ 其中$\alpha\to 0, \beta\to 0.$

$$[f(x)\cdot g(x)]=(A+\alpha)(B+\beta)$$

$$=AB+\underbrace{[\ (A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\ ]}_{\longrightarrow\ 0}$$

由无穷小运算法则,得

$$\therefore \quad \lim[f(x)\cdot g(x)]=(A\cdot B)$$

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

数列极限的运算法则

定理4

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

(3) 当 $y_n \neq 0$ ($n = 1,2,\cdots$) 且 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

定理5(保序性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=b.$

若 $\exists\delta>0, \forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 有 $\varphi(x)\ge\psi(x)$, 则 $a\ge b.$

$\boxed{\text{由第四节定理3可得}}$ 令 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$

三、求极限方法举例

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=?$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$，则商的法则不能应用.

（多项式与分式函数代入法求极限）

例2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0$,

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3} \cancel{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)} = \infty$

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,$ 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3}{x^2-9}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ (因式分解后消去零因子)

解 $$\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.　$(\dfrac{\infty}{\infty}$型$)$

解

先用x^3去除分子分母，分出无穷小，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 当$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$为无穷小,

而$\sin x$是有界函数.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

（利用无穷小运算性质求极限）

定理（复合函数的极限运算法则）设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

意义： 变量替换求极限的依据

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]}\xrightarrow[a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]{\text{令 } u=\varphi(x)}\boxed{\lim_{u\to a}f(u)}$$

四、小结

1.极限的四则运算法则及其推论;

2.极限求法;

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$ ____________ .

2、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ____________ .

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})=$ ____________ .

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ____________ .

5、 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ____________ .

6、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=$ ____________ .

7、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ ____________.

8、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$ ____________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n})$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

3、 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

4、 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

5、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x-1}{4^x+1}$

7、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}$

作业：P49

1：(3, 7, 10, 14)；2；3；6.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、极限存在准则

二、两个重要极限

三、小结

要求：了解准则内容，掌握两个重要极限.

极限存在准则

❖**准则 I**

如果函数$f(x)$、$g(x)$及$h(x)$满足下列条件:

(1) $g(x)\le f(x)\le h(x)$,

(2) $\lim g(x)=A$, $\lim h(x)=A$,

那么$\lim f(x)$存在，且$\lim f(x)=A$.

❖**准则II** 单调有界数列必有极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (或 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$)

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$ (或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$)

外大内小
内外互倒

一、极限存在准则

1.夹逼准则

准则 Ⅰ　如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

那么数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证　$\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0,\ N_2 > 0,\ \text{使得}$$

证 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon,$

当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon,$

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ 当 $n>N$ 时, 上两式同时成立,

即 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$

当 $n > N$ 时, 恒有 $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限

准则 Ⅰ′　如果当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ (或 $|x| > M$) 时, 有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$,　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那么 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A.

准则 Ⅰ 和准则 Ⅰ′ 称为夹逼准则.

注意：利用夹逼准则求极限关 键是构造出 y_n 与 z_n,

并且 y_n 与 z_n 的极限是容易求的 .

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

一、极限存在准则

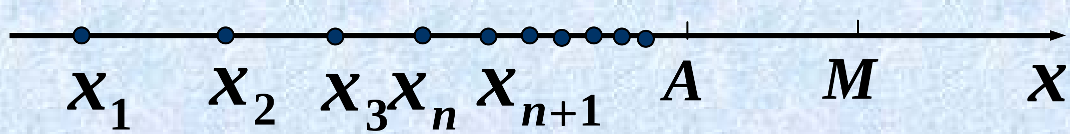
2.单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II　单调有界数列必有极限.

几何解释:



例4 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在，并计算其 极限.

证 (1) $\{x_n\}$是单调递增的；显然 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$,

$\because x_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3} = x_1$, 假设$n = k$时, $x_k > x_{k-1}$,

则$n = k+1$时, $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} > \sqrt{3+x_{k-1}} = x_k$,

$\therefore \{x_n\} \uparrow$

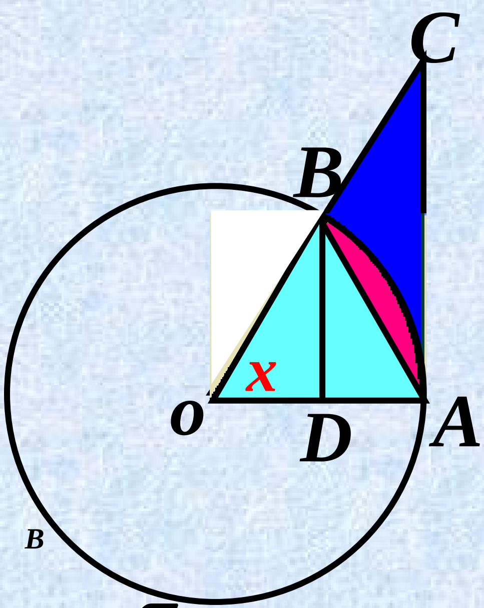
(2) $\{x_n\}$有界；

$\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$,

则$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$, $\therefore \{x_n\}$有界；

由(1)和(2)得, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

二、两个重要极限



(1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $<$ $x =$ 弧 AB, $<$ $\tan x = AC$,

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$,

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. ? 令 $x=-t$

$\because \cos x$ 在 $x = 0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$ 又 $\because \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,$

根据夹逼准则，有

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$ 问: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

应用时注意：

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\Box}{\Box}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\Box}{\Box}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\Box}{\sin\Box}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\Box}{\sin\Box}=1$$

注：一般地，若$x\to x_0$时，函数$\varphi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$$

例1. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=1$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解：令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 当 $x\to 0$ 时， $t\to 0$

由极限的运算法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}=1$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

令$x=\frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to \infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t=1$$

二、两个重要极限

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (1^\infty)$$

2.718 281 828 45 ……，记作e；即

无理数e是自然对数的底，在数学和其他科学技术中经常用到它。

例、设 $\boxed{x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots),}$ 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 .

证: 利用二项式公式 , 有

$$x_n=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\boxed{\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\boxed{(1-\frac{2}{n})}\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$

大　　　　大

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

正

比较可知　$x_n < x_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$

又　$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

又 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

记此极限为 e, 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

e 为无理数 , 其值为

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

根据准则 II 知：$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

一定存在，该极限值用字母 e 表示.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \qquad (e = 2.71828\cdots)$$

可以证明，对于连续变量 x，也有

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.}$$

当 $x\geq 1$ 时, 有 $[x]\leq x\leq [x]+1$,

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}\leq (1+\frac{1}{x})^{x}\leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$$

令 $t=-x$,

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

令 $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e.$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad (1^{\infty})$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (1^\infty)$$

一般形式：$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}(1+\frac{1}{\alpha(x)})^{\alpha(x)} = e$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$$

两种错误的形式：$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (\infty^0)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e}$$

(1^{∞}) 例4 求 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}}=\frac{1}{e}$

(1^{∞}) 例 求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2(x+2)-4}$ $\quad x^{a+b}=x^{a}\cdot x^{b}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{2}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-4}$$

$$=e^{2}\cdot 1=e^{2}$$

三、小结

1.两个准则

夹逼准则；单调有界准则．

2.两个重要极限

设 α 为某过程中的无穷小，

$$1^0\ \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^0\ \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

思考题

求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3^x + 9^x\right)^{\frac{1}{x}}$

思考题解答

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(9^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=9\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x\cdot x}}=9\cdot e^0=9$$

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x} =$ __________ .

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} =$ __________.

3、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arccot} x}{x} =$ __________.

4、 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cot 3x =$ __________.

5、 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{2x} =$ __________.

6、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$ __________.

7、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} =$ ____________ .

8、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} =$ ____________ .

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

2、 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^{n}$

5、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

三、利用极限存在准则证明数列

$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots\ldots$的极限存在，并求出该极限 .

作业：P56

1：(2, 4, 5, 6)；2 (1, 4)；4；6.

练习题答案

一、1、ω；　2、$\frac{2}{3}$；　3、1；　4、$\frac{1}{3}$；

5、0；　6、e；　7、e^2；　8、$\frac{1}{e}$；

二、1、2；　2、$\frac{1}{e}$；　3、e^{2a}；　4、e^{-1}；

5、3.

三、$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 2.$

第七节　无穷小的比较

一、无穷小的比较

二、等价无穷小替换

三、小结

重点：等价无穷小替换

第七节 无穷小的比较

引例．$x \to 0$ 时, $3x, x^2, \sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的．

问题：如何刻画两个无穷小在同一过程中趋于零的“快慢”速度？ 引入“阶”的概念

定义：设α,β是同一过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，

记作 $\beta = o(\alpha)$；

显然 β趋于零比 α“快些”

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小.

显然 β趋于零比 α“慢些”

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，就说 β 与 α 是同阶的无穷小；

β趋于零大体与 α“同样快慢”

特殊地，如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价的无穷小；

记作 $\alpha \sim \beta$；

注意 (1) 当$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$时，由于

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$$

所以，“β是比α高阶的无穷小量”等价于“α是比β较低阶无穷小量”。

(2) 同样，“β与α是同阶无穷小量”等价于“α与β是同阶无穷小量”。

(3) “β与α是等价无穷小量”等价于“α与β是等价无穷小量”。

定理1　β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

证　必要性　设 $\alpha\sim\beta$,

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=0,$$

$\therefore\quad \beta-\alpha=o(\alpha)$, 即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性　设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

$\therefore\quad \alpha\sim\beta$.

例1、**证明:** 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x$

证: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$$a^n-b^n=(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\left[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$=1$

$\therefore$ 当 $x\to0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x$

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \ (a \neq 0)$$

特别地，$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

例3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

解 令 $e^x - 1 = u$, 则当 $x \to 0$ 时,有 $u \to 0$,

$e^x = 1 + u$, 即 $x = \ln(1+u)$,

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(1+u)}{u}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

即,当 $x \to 0$ 时,$x \sim e^x - 1$.

例4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解　当$x\to 0$时, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,　$\tan 2x\sim 2x$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

注意　不能滥用等价无穷小代换.

对于代数和中各无穷小不能分别替换.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

解 当$x\to 0$时，$\sin 2x \sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

注意 ：只可对函数的因子作等价无穷小代换，对于代数和中各无穷小不能分别代换.

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\quad \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

常用等价无穷小：当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x,\quad \arcsin x \sim x,\quad \tan x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x,\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x) \sim x,\quad e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax\ (a \neq 0)$$

特别地，$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

例3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 5x \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3 + 3x}$.

解 当 $x \to 0$ 时 $\sin x \sim x$, 无穷小 x^3+3x 与它本身显然是等价的, 所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3}.$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解: 当 $x\to 0$ 时,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}x^2$$

$$\cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \quad \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}$$

Ex 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$.

$$\text{原式}\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

解 当$x\to 0$时，$\sin 2x\sim 2x$，

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

切记，只可对函数的因子作等价无穷小代换，对于代数和中各无穷小不能分别代换.

三、小结

1.无穷小的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考题

任何两个无穷小量都可以比较吗?

思考题解答

不能.　　例当 $x \to +\infty$ 时

$f(x) = \dfrac{1}{x}$,　　$g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$　都是无穷小量

但 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大

故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$和$g(x)$不能比较.

练 习 题

一、填空题:

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}=$____________.

2、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x^n}{(\sin x)^m}=$__________.

3、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=$___________.

4、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2\arctan x}=$__________.

5、$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=$__________.

6、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=$___________.

7、当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}(a>0)$

对于 x 是________阶无穷小 .

8、当 $x \to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价，则

$m =$ ________, n ________ .

二、求下列各极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

2、$\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^\alpha-e^\beta}{\alpha-\beta}$;

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$;

4、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$;

三、证明：若α,β是无穷小，则$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0(\alpha)$.

四、设 f(x)=$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2}x + \cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$

求：1、$f(x)$的表达式 .

2、确定 a,b 的值, 使得$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$，

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

作业：P59 4; 5.

练习题答案

一、1、$\frac{3}{2}$； 2、$\begin{cases} 0, m < n \\ 1, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$； 3、2； 4、$\infty$；

5、x； 6、$\frac{a}{n}$； 7、3； 8、$\frac{1}{2}$, 2.

二、1、$\frac{1}{2}$； 2、e^{β}； 3、$\alpha - \beta$； 4、$\sec^2 a$.

四、1、 $\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}, |x| > 1 \\ \dfrac{1+\cos(a+b)}{2}, x = 1 \\ \dfrac{1+\cos(a-b)}{2}, x = -1 \\ \cos(a+bx), |x| < 1 \end{cases}$ ；

2、$a = 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \cdots), b = 0.$

第八节 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

二、函数的间断点

三、小结

三、函数的连续性

(一)、函数的连续性概念

❖**变量的增量**

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一个邻域$U(x_0)$内有定义.

当自变量x由x_0变化到$x_0+\Delta x$，相应地 y由y_0变化到$y_0+\Delta y$.

则称Δx为自变量x的增量, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$为函数$y$的增量.

注意:“增量”不一定大于零, 它可正可负，但不能为0

❖函数的连续性定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \text{或}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

提示： $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

设 $x=x_0+\Delta x$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时, $x\to x_0$, 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

一、函数的连续性

1.连续的定义

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\boxed{"\varepsilon-\delta"\text{定义}}$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,$ 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

问题：函数在点x_0连续与存在极限的区别？

1) $f(x)$ 在$x=x_0$必须有定义　　2) $A= f(x_0)$

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$

❖函数的连续性定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \text{或}\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续,须满足三个条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 点有定义,即有确定的函数值 $f(x_0)$;

(2) $f(x)$ 在 x_0 点极限存在;

(3) $f(x)$ 在 x_0 点的极限值等函数值,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义，且$f(x_0-0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处左连续；

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义，且$f(x_0+0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理 函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$是函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如, 函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

如果函数在开区间(a,b)内连续, 并且在左端点$x=a$处右连续, 在右端点$x=b$处左连续, 则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

例 证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$\because \left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,$ 则 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$

对任意的α, 当$\alpha\ne 0$时, 有$|\sin\alpha|<\alpha$,

故$0\le|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当$\Delta x\to 0$时,由夹逼准则, $\Delta y\to 0.$

即函数 $y=\sin x$对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

（二）、 函数的间断点

❖间断点的定义

设函数 $f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义. 在此前提下, 如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一:

(1)在x_0没有定义;

(2)虽然在x_0有定义, 但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3)虽然在x_0有定义且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$;

则函数 $f(x)$在点x_0不连续, 而点x_0称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

❖间断点的类型

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点}\\\text{跳跃间断点}\end{cases}\\\text{第二类间断点}\end{cases}$$

1.第一类间断点

设 x_0是函数$f(x)$的间断点，如果左极限$f(x_0^-)$及右极限$f(x_0^+)$都存在，那么x_0称为函数$f(x)$的第一类间断点.

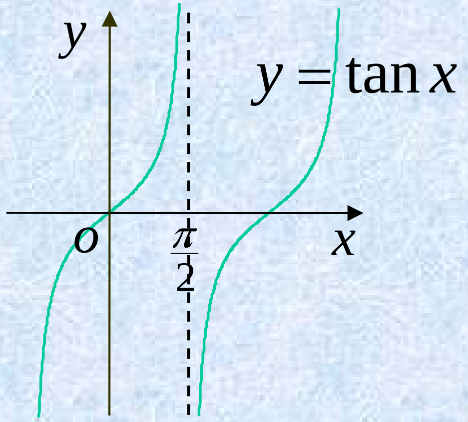
在第一类间断点中， 左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点.

2.第二类间断点

左极限$f(x_0^-)$及右极限$f(x_0^+)$至少有一个不存在

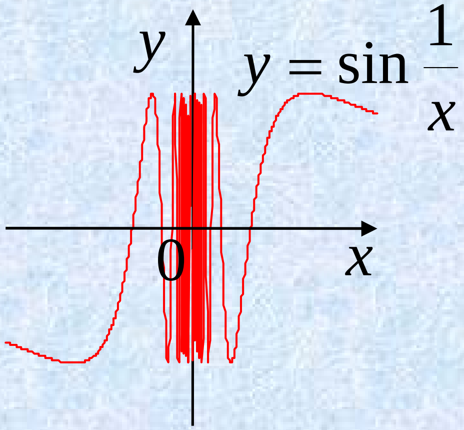
例如:

(1) $y=\tan x$



$x=\frac{\pi}{2}$ 为其无穷间断点 .

(2) $y=\sin\frac{1}{x}$

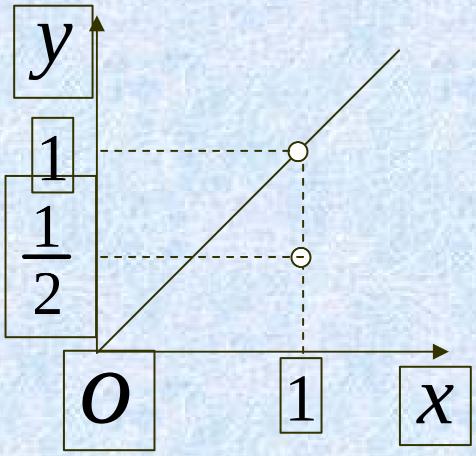


$x=0$ 为其振荡间断点 .

(3) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

$x=1$ 为可去间断点 .

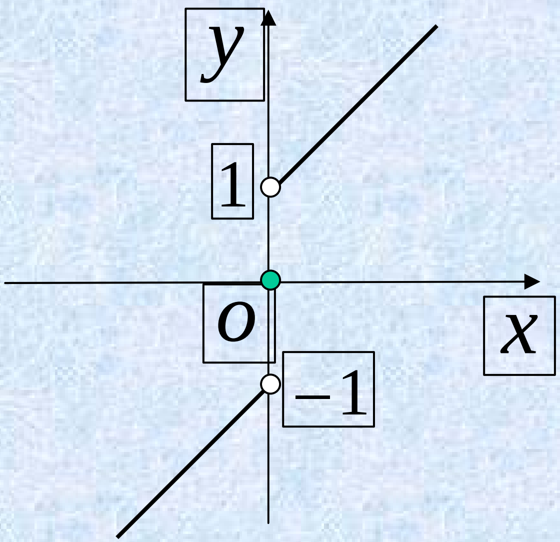
(4) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$



显然 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$

$x = 1$ 为其可去间断点.

(5) $y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$



$f(0^-) = -1, \qquad f(0^+) = 1$

$x = 0$ 为其跳跃间断点.

三、小结

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

2.区间上的连续函数;

3.间断点的分类与判别;

间断点
- 第一类间断点:跳跃型, 可去型.
- 第二类间断点:无穷型,振荡型.

(见下图)

思考题

若 $f(x)$在 x_0连续，则$|f(x)|$、$f^2(x)$在 x_0是否连续？又若$|f(x)|$、$f^2(x)$在 x_0连续，$f(x)$在 x_0是否连续？

思考题解答

$\because f(x)$在x_0连续， $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

且 $0\le \left|\,|f(x)|-|f(x_0)|\,\right|\le |f(x)-f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]=f^2(x_0)$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续

但 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续

练 习 题

一、填空题：

1、指出 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1$ 是第________类间断点；在 $x=2$ 是第______类间断点．

2、指出 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在 $x=0$ 是第_________类间断点；在 $x=1$ 是第_______类间断点；在 $x=-1$ 是第______类间断点．

二、研究函数 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$ 的连续性，并画出函数的图形．

三、　指出下列函数在指定范围内的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续．

1、　$f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 在 $x\in R$ 上．

2、　$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, 在 $x\in R$ 上．

四、　讨论函数　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点，判断其类型．

五、试确定 a,b 的值，使 $f(x)=\dfrac{e^{x}-b}{(x-a)(x-1)}$，有无穷间断点 $x=0$.

练习题答案

一、1、一类, 二类;　2、一类, 一类, 二类.

二、$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续, $x=-1$为跳跃间断点.

三、1、$x=1$为第一类间断点;

2、$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$为可去间断点,

$x=k\pi(k\neq 0)$为第二类间断点.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 1, x=0\end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

四、$f(x)=\begin{cases}x, |x|<1 \\ 0, |x|=0 \\ -x, |x|>1\end{cases}$ $x=1$ 和 $x=-1$ 为第一类间断点.

五、$a=0, b\neq 1$;

作业：P65 3: (2, 3, 4) ; 4; 7.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、积及商的连续性

二、反函数与复合函数的连续性

三、初等函数的连续性

四、小结

一、连续函数的和、积及商的连续性

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点 x_0处也连续.

例如, $\sin x,\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

即 三角函数在其定义域内 连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理2　严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如，$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续，

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续；

$y=\arctan x, y=arc\cot x$ 在$[-\infty,+\infty]$上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

❖ **定理3**

设函数$y=f[g(x)]$由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$在u_0连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$

解： 原函数由$y=\sqrt{u}$和$u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$复合而成，

且$\lim\limits_{x\to 3}u=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$， 而$y=\sqrt{u}$在$x=\dfrac{1}{6}$

处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\lim\limits_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

定理4 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

注意 定理4是定理3的特殊情况.

例如，$u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，

$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

三、初等函数的连续性

定理5　基本初等函数在定义域内是连续的.

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续；

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续；

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^{u}, u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续， 讨论μ不同值，

(可以证明，幂函数均在其定义域内连续)

定理6 一切初等函数在其**定义区间**内都是连续的.

注意 定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意　初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续

例如，　$y=\sqrt{\cos x-1}$，　$D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$，　$D: x=0$，及$x\geq 1$，

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

注意　初等函数求极限的方法代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in 定义区间)$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

关于幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的几个结果：

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=A^B.$$

证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=e^{A\ln B}=A^B$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2x\cdot\frac{3}{\sin x}}=e^6$$

四、小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性. 两个定理； 两点意义.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法.

练 习 题

一、填空题:

1、$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x+4}=$______________.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$______________.

3、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=$______________.

4、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\tan^2 x}=$______________.

5、$\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}=$______________.

6、设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ a+x, x\geq 0 \end{cases}$，当 $a=$______时，$f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 .

7、函数 $f(x)=\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x-6}$ 的连续区间为

____________________.

8、设 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, 当|x|\le 1时\\ |x-1|, 当|x|>1时\end{cases}$ 确定

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=$____________; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$_____________.

二、计算下列各极限：

1、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$； 2、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x}$；

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

三、设 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, x<0 \\ 1\ , x=0 \\ \ln(b+x+x^2), x>0 \end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续，试确　定 a 和 b 的值.

四、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$ ，已知 $|g(x)|\le|f(x)|$，试证函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

练习题答案

一、1、2；　2、$\frac{1}{2}$；　3、0；　4、0；

5、$-\frac{1}{2}(\frac{1}{e^2}+1)$；　6、1；

7、$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$；

8、$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, 不存在.

二、1、$\cos a$；　2、1；　3；$\frac{1}{e^2}$.

三、$a=1, b=e$.

作业：P70

3：(3, 5, 7)；4 (3, 4, 5, 6)；6.

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、最大值、最小值定理

二、介值定理

三、小结

一、最大值和最小值定理

定义：对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值.

定理1（有界性与最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

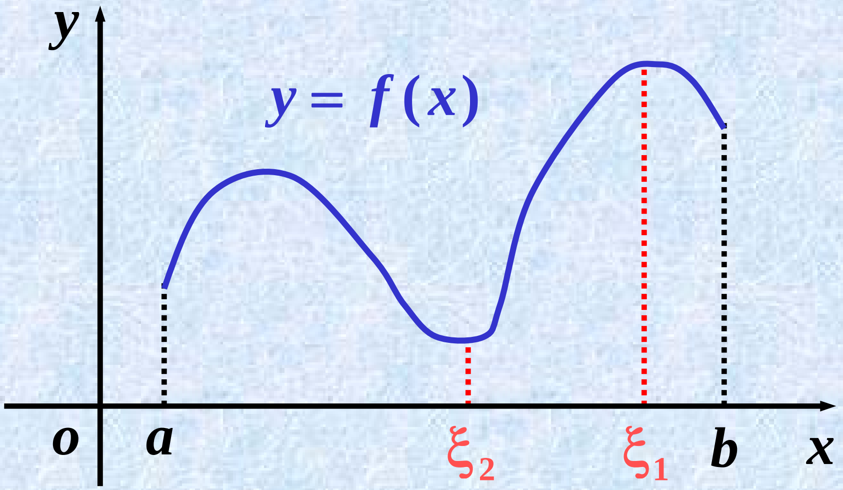
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

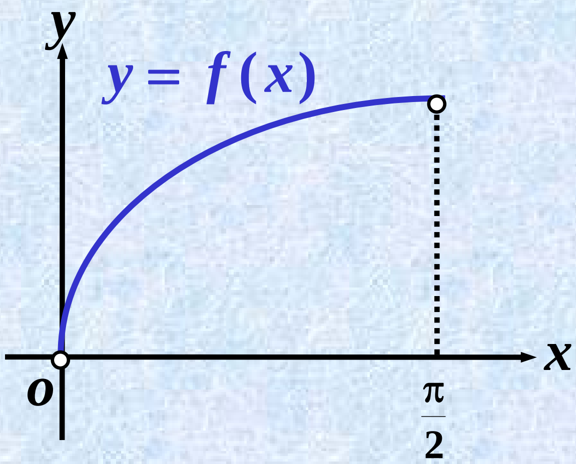
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



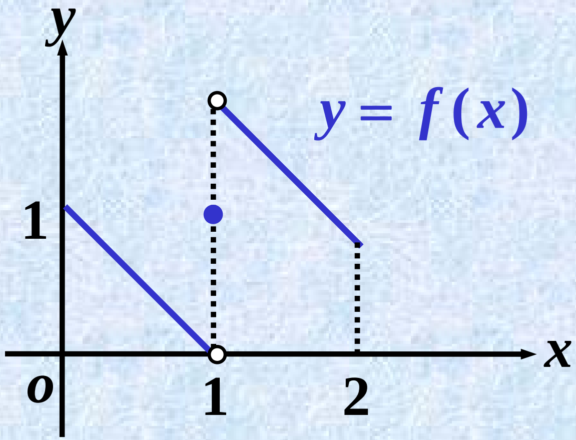
注意： 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.

注意：1.若区间是开区间，定理不一定成立;



2.若区间内有间断点，定理不一定成立.



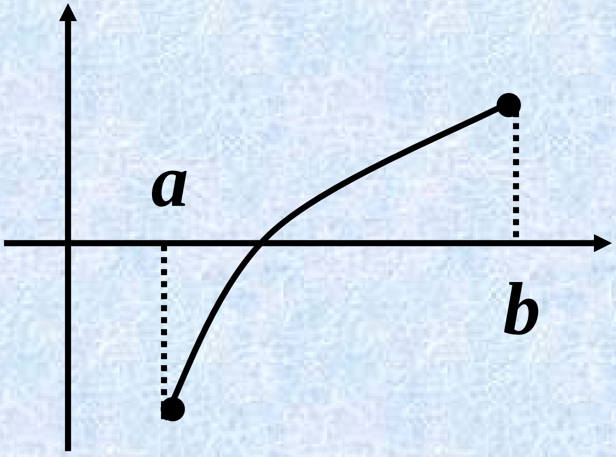
二、介值定理

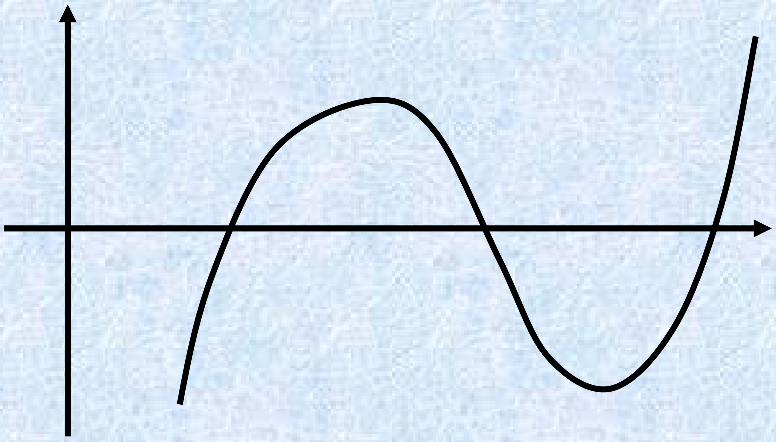
定义: 若 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理2（零点定理） 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少 $\exists$ 一个零点.

(即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.)



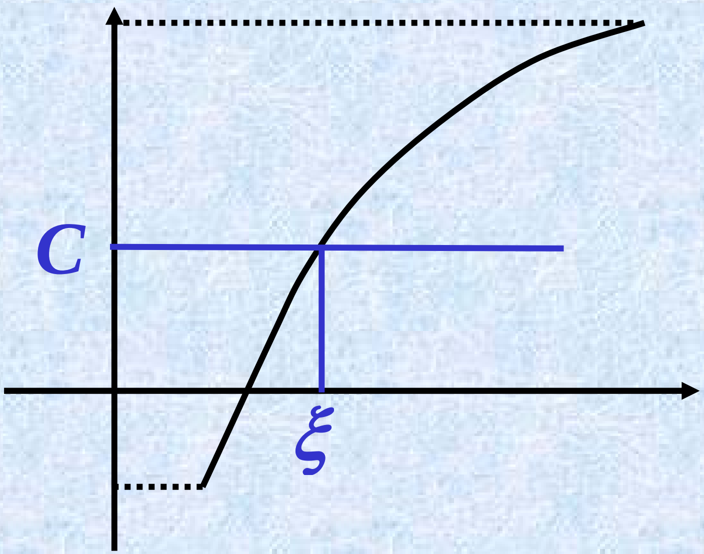


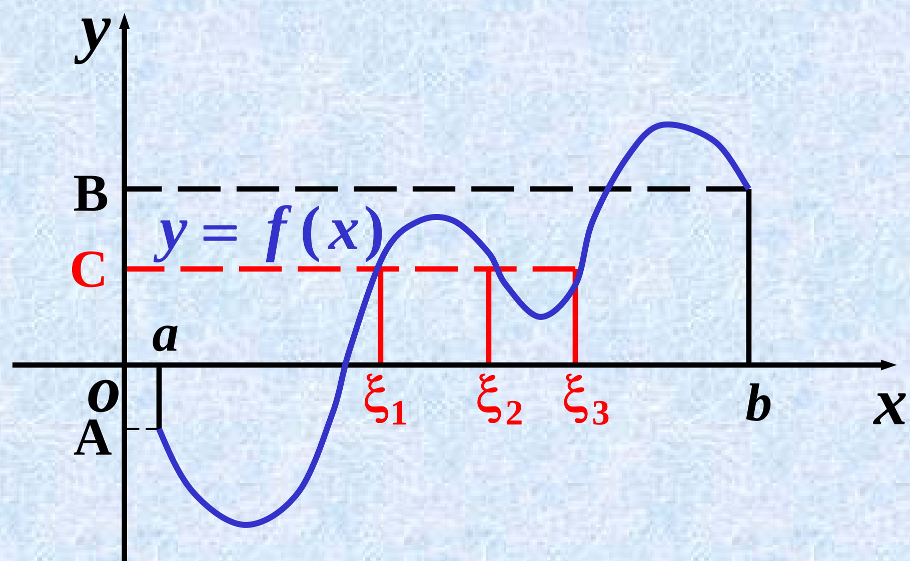
定理3（介值定理）

设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)\neq f(b)$,

则对于介于$f(a)$、$f(b)$之间的$\forall C$,

至少$\exists$一点$\xi\in(a,b)$, 有$f(\xi)=C$.





几何解释: 连续曲线弧$y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.

用零点定理证

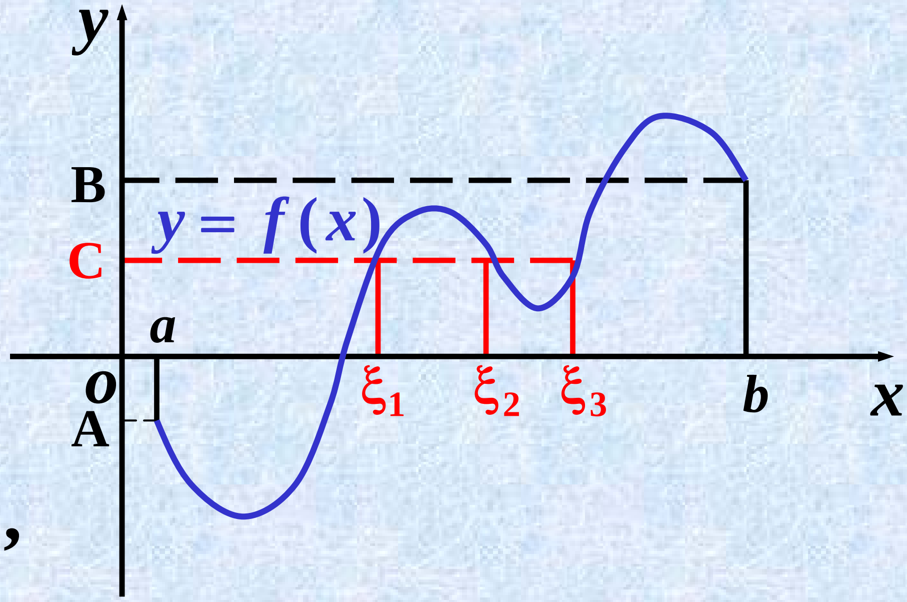
证 设$\varphi(x)=f(x)-C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a)=f(a)-C$

$=A-C,$

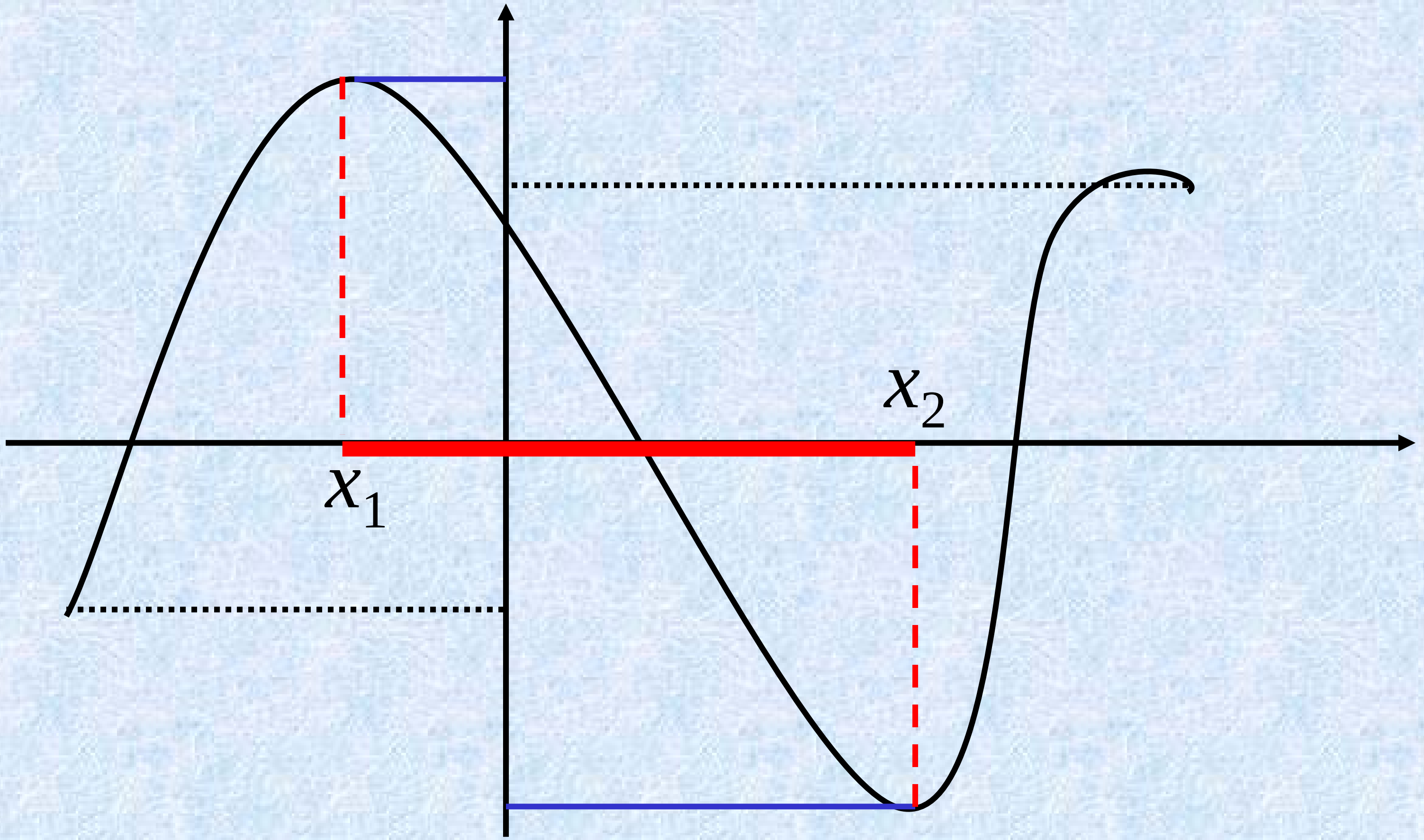
$\varphi(b)=f(b)-C=B-C,$



$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0,$ 由零点定理, $\exists\,\xi\in(a,b),$使

$\varphi(\xi)=0,$ 即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0,$ $\therefore f(\xi)=C.$

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.



代数应用: 零点存在定理给了大家一个判定方程在某个区间上是否有根的方法.

$$\xi \in (a,b), 使得 f(\xi)=0.$$

例1 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根 .

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists \xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$, 由零点定理,

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

三、小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理;根的存在性定理.

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. 直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;

2. 辅助函数法:先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

练 习 题

一、证明方程 $x = a\sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

二、 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$上必有 ξ ，使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$.

三、 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < c < d < b$,试证明：对任意正数p和q；至少有一点 $\xi \in [c, d]$, 使 $pf(x) + qf(x) = (p + q)f(\xi)$.

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

作业：P74（习题1-10） 2; 3; 5.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但 $f(x)$在$(0,1)$内无零点.