线性代数

高景利
南阳师范学院数学与统计学院

目　录

目　录

- 1．理解n维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
- 2．理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
- 3．理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
- 4．理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
- 5．了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
- 6．了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.
- 7．理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
- 8．理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
- 9．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

学习考研要求

- 1．理解n维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
- 2．理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
- 3．理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
- 4．理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
- 5．了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
- 6．了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.
- 7．理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
- 8．理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
- 9．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

第一节 向量组及其线性组合

1. n维向量

n个数组成的有序数组

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为**n维向量**，a_i 称为向量的**第i个分量**．向量一般用小写的希腊字母α，β，γ...表示，分量一般用小写的英文字母 a_i, b_i, c_i … 表示. n维向量也可以写成行的形式:

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

特别地，称分量都为0的向量为**零向量**．记作 0

称向量 $-\alpha=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}$ 为向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的**负向量**.

向量相等　设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$　$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

若 $a_i=b_i\quad(i=1,2,\cdots n)$ 则称 α 与 β **相等**.

记作　$\alpha=\beta$

2. 向量的线性运算

(1) 加减法

设 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则

$$\alpha \pm \beta = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

(2) **数乘** **设** $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ **,** k 为任意实数

则 $k\alpha=\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$

运算法则:

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=\theta$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(6) $1\alpha = \alpha$

(7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$

注意： 向量的线性运算法则与矩阵的线性运算法则没有什么区别.

3. 向量组及其线性组合

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）

所组成的集合叫做**向量组**

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全部解当 $R(A)<n$ 时是一个含无限多个 n 维列向量的向量组.

向量组与矩阵之间的关系

一方面，$m\times n$ 矩阵的全体列向量是一个含有 n 个 m 维列向量的向量组，它的全体行向量是一个含有 m 个 n 维行向量的向量组.

另外，

m 个 n 维列向量所组成的向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

构成一个 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

线性方程组的向量表示

线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

线性方程组的矩阵形式 $Ax=b$

令

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

线性方程组的向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$$

定义2　给定向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ ，

对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ ，表达式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称为向量组A的一个**线性组合**，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 b

如果存在一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ ，使

$$b=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

则称**向量** b **能由向量组** A**线性表示.**

定理 1　向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

$\Leftrightarrow$线性方程组$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$有解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$。

推论　（1）向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{B})$，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$。

（2）向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，且表达式唯一的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=m$，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$

（3）向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，且表达式不唯一的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})<m$，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$。

例2　设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

证明向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出表达式.

定义3　设有两个向组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$，若 B组中的每个向量都能由向量组A 线性表示，则称向量组 B能由向量组 A线性表示.

若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个**向量组等价**.

等价作为向量组与向量组之间的关系具有反身性，对称性和传递性

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$，则

向量组B 能由向量组 A线性表示 $\Leftrightarrow$

矩阵方程 $AX=B$ 有解.

定理2　向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$的秩，即

$$R(A)=R(A,B)$$

推论　向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 与向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价充分必要条件

$$R(A)=R(B)=R(A,B)$$

例3 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明向量组 α_1,α_2 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价.

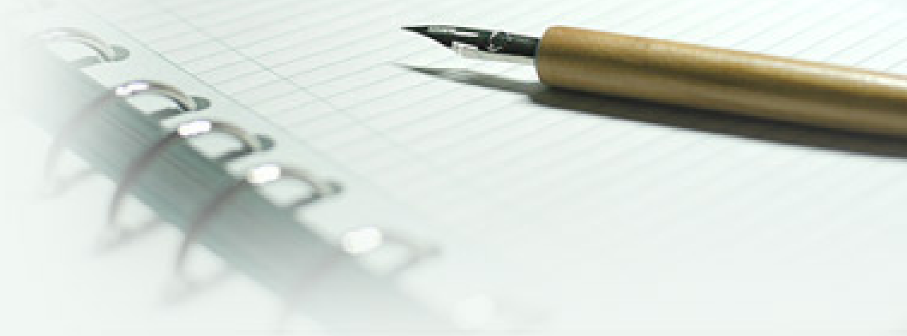
第二节　向量组的线性相关性

1. 定义

定义　设n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若存在一组不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性相关**，否则称为**线性无关**. .



向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性相关**

$\Leftrightarrow$

齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

有非零解

$\Leftrightarrow$

系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩**小于** s .

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性无关**

$\Leftrightarrow$

齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

只有零解

$\Leftrightarrow$

系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩**等于** s .

2. 判定

定理 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的秩小于向量的个数 m ； 向量组线性无关的充分必要条件是 $R(A)=m$

(1) 单个向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha=0$；

(2) 含有两个向量 α,β 的向量组线性相关的充分必要条件是 α,β 对应成比例；

等价定义　向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是在向量组 A中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 向量线性表示.

例4　设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$，　$\alpha_2=(-1,-1,2)^T$，$\alpha_3=(2,3,-5)^T$，　讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

例5　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$. 证明 β_1,β_2,β_3 线性无关.

3. 性质

(1) 含有零向量的向量组线性相关；

(2) 存在部分相关，整体也相关；

整体无关，任意部分都无关；

(3) 设k维向量组 $(\mathrm{I})\ \alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik})$

s 维向量组 $(\mathrm{II})\ \beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik},a_{ik+1},\cdots a_{is})$

若向量组 (I) 线性无关，则添加一些分量后的向量组 (II)也线性无关；

（4）任意 $n+1$个 n 维向量组都线性相关；

任意m个n维向量，如果$m>n$，则必线性相关；

(5) n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 且表示法唯一；

第三节 向量组的秩

1 向量组的极大无关组

定义 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为n维向量组 A 中的一部分向量，如果满足：

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(ii) A 中任意一个向量 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示 .

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的一个**极大无关组.**

性质（1） n 维向量组 A的极大无关组不唯一, 但

任何一个极大无关组所含向量的个数是唯一的.

（2） n 维向量组 A与它的任何一个极大无关组等价.

等价定义 如果n维向量组 A中的一个部分组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且向量组 A 中的任意 $r+1$

个向量都线性相关，则称

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为 A 的一个极大无关组.

2 向量组的秩

定义 向量组A的极大无关组所含向量的个数称为向量组A的**秩**.

性质 （1）向量组(I)的秩为r，向量组(II)的秩为m，如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表示，那么$r\le m$.

（2）如果两个向量组等价，那么秩相等.

（3）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关的充分必要条件是它的秩$=r$.

（4）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关的充分必要条件是它的秩$<r$.

3 向量组的秩及最大无关组的求法

定理 6 矩阵的秩等于它的列向量组的秩也等于它的行向量组的秩.

对于只含有有限个向量的向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ ，写出它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，求出A的秩也就是向量组的秩.

方法：首先写出它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，然后用矩阵的初等行变换化为行阶梯型矩阵，非零行的行数即为向量组的秩，非零行的第一个非零元所对应的原向量组中的向量即为向量组的最大无关组.

例11 求下列向量组的秩，并求一个最大无关组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\8\end{pmatrix}$$

解

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&8\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix}r_2-2r_1\\r_3+r_1\\r_4-4r_1\end{matrix}}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&82&0\\0&19&0\\0&-32&0\end{pmatrix}\underset{\sim}{\begin{matrix}r_2\div 82\\r_3-19r_1\\r_4+32r_1\end{matrix}}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，向量组的秩等于2，其中 α_1,α_2 为其最大无关组.

第四节 线性方程组解的结构

- 一、齐次线性方程组解的结构
- **1.**齐次线性方程组解得性质
- 设齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$$

它的解 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{k}_n$ ，令 $\xi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_1 \\ \boldsymbol{k}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{k}_n \end{pmatrix}$

称之为方程组的解向量，也即是 $A\xi = 0$.

- **性质1** 若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为方程组 $Ax=0$ 的解，则

  $x=\xi_1+\xi_2$ 也是其解.

- **性质2** 若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解，则对任意的实数 k，

  $x=k\xi_1$ 也是其解.

- 若 $x=\xi_1, x=\xi_2, \cdots, x=\xi_r$ 是方程组 $Ax=0$ 的解，则对任意的一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$ 都是其解.

- 齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系.

- 定理7 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

◆ 例12 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

- 二、非齐次线性方程组解的结构
- **1.**非齐次线性方程组解的性质
- 设非齐次线性方程组
- $$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \qquad (1)$$
- 则称它所对应的齐次线性方程组
- $$\boldsymbol{Ax}=0 \qquad (2)$$
- 为其导出组.

- **性质1**　设 $x=\eta_1, x=\eta_2$ 都是（1）的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 为其导出组（2）的解.
- **性质2**　设 $x=\eta$ 是（1）的解，$x=\xi$ 是（2）的解，则 $x=\eta+\xi$ 仍是（1）的解.

若方程（2）的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，则方程（1）的任一解总可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$$

为（1）的一个特解

例16 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

第五节 向量空间

一、向量空间、基、维数

1. 向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足：

加法封闭：若 α，$\beta \in V$，则 $\alpha + \beta \in V$；

数乘封闭：若 $\alpha \in V$，则 $k\alpha \in V$；

则称V为一**向量空间**.

例1

$$V = \{\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 2, \cdots, n\}$$

$$V = \{\alpha = (1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 2, \cdots, n\}$$

由一个零向量构成的向量空间称为**零空间**；

由全体 n维实向量构成的向量空间记为 R^n

2. 基与维数

设V为向量空间，若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V$，且

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) V中任何向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$V$的一组**基**；$r$为$V$的**维数**，记为$\dim V=r$. （注意空间维数与向量维数的区别）

3. 子空间

设 U 为向量空间V的非空子集，且 U也构成向量空间，则称 U为V的一个**子空间**. 记 $U \subset V$.

4. 生成的子空间

(1) **定义**　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in R^n$，则称

$$V=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_i\in R, i=1,2,\cdots,m\}$$

为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **生成的子空间**．　记作

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

(2) **性质**

(i)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的基, $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩;

(ii)　$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价;

(iii) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\subset L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示;

(iv) $\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R^n$，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=R^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一组基，$\dim\ R^n=n$.

例2 设 $\alpha_1=(1,0,-1,2),\alpha_2=(3,0,-3,6),\alpha_3=(2,0,1,4),$ 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基与维数.

例3 设 $\alpha_1=(2,3,-1,0),\alpha_2=(1,5,3,-2),\beta_1=(5,4,-6,2)$ $\beta_2=(8,5,-11,4)$. 试证 $L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2)$

二、坐标与坐标变换

1. 坐标

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量空间 V 的一组基， α 是 V 中的一个向量 α ，α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示成 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$

称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的**坐标**，记作 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

注意： 向量的坐标不要与向量混为一谈，n 维向量只有在自然基（即 $e_1,e_2,\cdots,e_n$）下的坐标才是它的本身.

例4 求 $\alpha=(1,2,3)$ 在基 $\beta_1=(1,0,1)$, $\beta_2=(0,1,1)$ $\beta_3=(1,1,1)$ 下的坐标.

2. 过渡矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是向量空间 V的两组基，且

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\
\beta_2 &= p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n &= p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n
\end{aligned}
$$

或写为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

其中

$$P = (p_{ij})_n$$

称 P 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**

3. 坐标变换

设V中的某个向量 α 在两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称之为**坐标变换公式**.

例5　设 R^4 的两组基为

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \alpha_1=(1,0,0,0) \\ \alpha_2=(0,2,0,0) \\ \alpha_3=(0,1,2,0) \\ \alpha_4=(1,0,1,1) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} \beta_1=(5,2,0,0) \\ \beta_2=(2,1,0,0) \\ \beta_3=(0,0,8,5) \\ \beta_4=(0,0,3,2) \end{cases}$$

(1) 求由基(II)到基(I)的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\beta=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$ 在基(II)下的坐标.